2017年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2017 年 2 月 7 日 13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること.
乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること.
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること.
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない.
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと.
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること.
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること.
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること.
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい.

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す.

1 V, W を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$f : V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 等式

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$$

が成り立つことを，次の (i), (ii) を示すことにより示せ．

(i) $\mathrm{Ker} f$ の基底を $v_1, \ldots, v_k$ とし，$\mathrm{Im} f$ の基底を $w_1, \ldots, w_m$ とする．さらに

$$f(v_{k+i}) = w_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

となる $v_{k+1}, \ldots, v_{k+m} \in V$ をとる．このとき，$v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$ は一次独立であることを示せ．

(ii) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+m}$ は V の基底になることを示せ．

(2) U を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線形空間とし，$g : W \to U$ を線形写像とする．このとき，合成写像 $g \circ f$ について

$$\dim \mathrm{Im}(g \circ f) \geq \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Im} g - \dim W$$

が成り立つことを示せ．

2 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立なベクトルとする．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続かつ任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$f(x + v_1) = f(x + v_2) = f(x)$$

をみたすとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対し，次をみたす整数 $m_1(x), m_2(x)$ が存在することを示せ．

$$x - m_1(x)v_1 - m_2(x)v_2 \in \{t_1 v_1 + t_2 v_2 \in \mathbb{R}^2 \mid t_1, t_2 \in [0, 1]\}.$$

(2) f は $\mathbb{R}^2$ 内で最大値と最小値を持つことを示せ．

3 以下の問に答えよ．

(1) R を正の実数とする．複素数係数のべき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は，

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$

で正則とする．このとき，a_n を，複素平面内の原点を中心とし半径 r の円周に沿う，$f(z)$ を含む複素積分を用いて表せ．ただし $0 < r < R$ とする．

(2) 複素関数 $g(z)$ は $\mathbb{C}$ 上で正則とする．正の実数 ρ に対し，

$$M(\rho) = \max_{z \in \mathbb{C},\, |z| = \rho} |g(z)|$$

とおく．ある正の定数 M と正の整数 k が存在して

$$M(\rho) \leq M\rho^k$$

が任意の $\rho > 0$ に対して成り立つとき，$g(z)$ を求めよ．

4 (X,d) を d を距離とする距離空間とする．X の部分集合 A は次の条件をみたすとき点列コンパクトであるという．

『A の任意の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ と A の点 a が存在し，

$$\lim_{j\to\infty} d(x_{n_j}, a) = 0$$

をみたす．』

以下の問に答えよ．

(1) A を X の点列コンパクトな部分集合とする．A は閉集合か．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげ，それが反例になっていることを示せ．

以下では，(X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とし，$f : X \to Y$ は連続とする．

(2) A を X の点列コンパクトな部分集合とするとき，A の f による像 $f(A)$ は Y の点列コンパクト集合であることを示せ．

(3) A_m $(m = 1, 2, \ldots)$ は X の点列コンパクトな部分集合で

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$$

をみたすとする．このとき，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} f(A_m) = f\Bigl(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\Bigr)$$

を示せ．