2017年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2016 年 7 月 30 日　13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 A と B を対角化可能な n 次複素正方行列とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) A と B が，ある共通の行列により対角化できるならば, $AB = BA$ が成り立つことを示せ.

以下，$AB = BA$ が成り立つと仮定し，A の固有値 α に対する固有空間を $W(A, \alpha)$ と書く．

(2) 任意の $v \in W(A, \alpha)$ に対し，$Bv \in W(A, \alpha)$ が成り立つことを示せ.

(3) (i) B の固有ベクトルからなる $W(A, \alpha)$ の基底が存在することを示せ．

(ii) (i) を用いて，A と B は，ある共通の行列により対角化できることを示せ.

2 区間 $[0,\infty)$ 上の非負連続関数 f は，ある $\alpha>0$ があって，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$$

をみたすとする．

(1) f は $[0,\infty)$ で有界であることを示せ．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は発散することを示せ．

次に，区間 $[0,\infty)$ 上で定義された非負連続関数 g は，

$$\int_0^\infty g(x)\,dx<\infty$$

をみたすとする．

(3) ある数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset [0,\infty)$ で，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} g(a_n)=0$$

をみたすものが存在することを示せ．必要ならば

$$I_n=\int_n^{n+1} g(x)\,dx \quad (n=0,1,2,\dots)$$

を利用して上記の広義積分を考察せよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=0$ は成り立つか．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげ，それが反例となっていることを示せ．

3 $a > 0$ を定数として，複素関数

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)\sin(\pi z)}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ における $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) N は自然数で $N > a$ をみたすものとする．複素平面上で，原点を中心とする半径 $N + \dfrac{1}{2}$ の円周に反時計回りの向きを入れた積分路を C_N で表す．このとき，積分

$$\int_{C_N} f(z)\, dz$$

の値を求めよ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$ の値を求めよ．必要ならば

$$|\sin(\pi z)| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z \in C_N,\ N = 1, 2, \ldots$$

が成り立つことを用いてもよい．

4 以下の問に答えよ．

(1) 位相空間 X の部分集合 K がコンパクトであることの定義を開被覆を用いて述べよ．

(2) 位相空間 X はコンパクトであるとし，X の部分集合 A は閉集合と仮定する．このとき，A はコンパクトか．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげ，それが反例になっていることを示せ．

(3) 位相空間 Y がハウスドルフの分離公理をみたすことの定義を開集合を用いて述べよ．

(4) 位相空間 Y はハウスドルフの分離公理をみたすとし，Y の部分集合 B はコンパクトであると仮定する．このとき，B は閉集合か．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげ，それが反例になっていることを示せ．