2017年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2016 年 7 月 30 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

　問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 a, b, c, d を実数とする．$\mathbb{R}^4$ の中の部分集合 V, W を以下で定義する．

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & c \\ x_1 & +3x_2 & & +4x_4 & = & c \\ x_1 & +x_2 & +ax_3 & +4x_4 & = & c \end{array} \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrcl} x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & d \\ 2x_1 & +(b+5)x_2 & -2x_3 & +(2b+6)x_4 & = & d \end{array} \right\}.$$

このとき以下の問に答えよ．

(1) $V \cap W$ が $\mathbb{R}^4$ の線形部分空間になるための，a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ．

以下，a, b, c, d は (1) の条件をみたすとする．

(2) $\dim(V \cap W) = 1$ となるための，a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ．またそのとき，$V \cap W$ の基底を一組求めよ．

(3) $V \oplus W = \mathbb{R}^4$ となるための，a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ．

2 3次複素正方行列全体のなす複素線形空間を V とし，複素数を係数とする t についての多項式全体の集合を $\mathbb{C}[t]$ と書く．$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

に対し，

$$W = \{f(A) \mid f(t) \in \mathbb{C}[t]\}$$

とおく．このとき，以下の問に答えよ．

(1) W は V の複素線形部分空間であることを示せ．

(2) 複素線形空間 W の次元を求めよ．

(3) W の次元が最小になるときの α, β, γ の必要十分条件を求め，そのときの行列 A のジョルダン標準形を求めよ．(変換行列を求める必要はない．)

3 以下の各問に答えよ．各問は独立である．

(1) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上の微分可能な関数とする．いま，

$$x = \frac{\sin\theta}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} \quad (\theta, \varphi > 0,\ \theta + \varphi < \pi/2)$$

と変数変換し，θ, φ の関数 $g(\theta,\varphi)$ を $g(\theta,\varphi) = f\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\varphi}, \dfrac{\sin\varphi}{\cos\theta}\right)$ で定義する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を $\theta, \varphi, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \dfrac{\partial g}{\partial \varphi}$ を用いて表せ．

(2) 次の広義積分が収束する実数 p の範囲を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{x^2+1-\cos x}{(x^2+1)x^p} dx.$$

(3) f, g は区間 $[0,1]$ 上の C^1 級関数とし，$g(0)g(1) \neq 0$ をみたすとする．このとき，次の重積分 I を $f(0), f(1), g(0), g(1)$ を用いて表せ．

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)f'(x)g'(y)\exp(f(x)g(y))dxdy.$$

4 実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は，

$$a_n > 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

かつ

$$a_n \geq \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

をみたしているとする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し，$b_n = a_n - a_{n-1}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調非増加数列であることを示せ．

(2) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界であることを示せ．必要ならば背理法を用いよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ は収束することを示せ．

（以上）