# 2016年度 名古屋大学大学院
# 多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
# 入学試験問題（第 2 次募集）

## 午後の部

2016 年 2 月 4 日（木）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること.
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ , $\boxed{2}$ , $\boxed{3}$ , $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること.
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない.
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと.
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること.
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること.
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること.
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい.

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す.

**1** $A$ を $n$ 次正方複素行列とする．また，$A$ は $0$ を固有値に持ち，その重複度を $m \geq 1$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 $A$ の Jordan 標準形における固有値 $0$ の Jordan 細胞 (Jordan ブロック) の個数を $k$ とするとき，$k \leq m$ であることを示せ．

(2) 以下の不等式を示せ．

$$n - m \leq \operatorname{rank} A \leq n - 1.$$

(3) $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ ならば，$\operatorname{rank} A = n - m$ であることを示せ．

**2** $\mathbb{R}$ の開区間 $I=(0,1)$ 上で定義された関数

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ は任意の点 $a\in I$ で連続であることを $\varepsilon$-$\delta$ 法により示せ．

(2) 関数 $f(x)$ は $I$ 上で一様連続であるかどうか判定せよ．

ただし，$\mathbb{R}$ の区間 $I$ 上で定義された関数 $f(x)$ が $I$ 上で一様連続であるとは以下の条件をみたすことである．

「任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在して，以下が成り立つ．

$$x,y\in I,\ |x-y|<\delta \text{ ならば，} |f(x)-f(y)|<\varepsilon.\text{」}$$

**3** $a \in \mathbb{R}$ とし，複素関数

$$f(z) = \frac{e^{az}}{z^2+1}$$

を考える．$R > 100$ なる実数 $R$ に対して，

$$C_R = \{z = 1 + Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\},$$

$$L_R = \{z = 1 + iy \in \mathbb{C} \mid -R \le y \le R\}$$

とおく．また，$C_R$ および $L_R$ に対して，閉曲線 $C_R \cup L_R$ が反時計回りとなるように向きを定める．以下の問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_R \cup L_R} f(z)dz$ の値を求めよ．

(2) $a > 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz$ および $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) $a \le 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} f(z)dz$ の値を求めよ．

**4** $(X,d)$ を距離空間とする．また，$a,b\in X$ に対して $d(a,b)$ は $a$ と $b$ の距離を表すとする．以下の問に答えよ． ただし，$\mathbb{R}$ の完備性は用いてよい．

(1) $X$ の元の列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して, 以下の不等式を示せ．

$$|d(a_m,b_m)-d(a_n,b_n)|\leq d(a_m,a_n)+d(b_m,b_n).$$

(2) $X$ の元の列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ はともに Cauchy 列とする．このとき，$\mathbb{R}$ の数列 $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ を $c_n=d(a_n,b_n)$ と定めると，$(c_n)_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(3) $X$ の元の Cauchy 列全体の集合を $Y$ とする．$Y$ において関係 $\sim$ を

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}\sim(b_n)_{n=1}^{\infty}\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)=0$$

と定めると，$\sim$ は $Y$ における同値関係となる．この同値関係 $\sim$ による商集合 $\overline{Y}=Y/\sim$ に対して，写像 $\overline{d}:\overline{Y}\times\overline{Y}\to\mathbb{R}$ を

$$\overline{d}(\overline{(a_n)_{n=1}^{\infty}},\overline{(b_n)_{n=1}^{\infty}})=\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n)$$

と定める．このとき，$\overline{d}$ は well-defined であることを示せ．



（以上）