2016年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2016 年 2 月 4 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を以下で定める.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{matrix} \right\},$$

$$W_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

以下の問に答えよ.

(1) W_1 の基底を一組求めよ.

(2) 和空間 $W_1 + W_2$ の基底を一組求めよ.

(3) 連立一次方程式

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 + hx_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間がちょうど W_2 となるような実数の組 a, b, c, d, e, f, g, h を一組求めよ.

2 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間，$(\ ,\ )$ を V 上の内積とする．線形写像 $f : V \to V$ が

$$(f(v), w) = (v, f(w)), \quad v, w \in V$$

をみたすとき，f は対称であるという．以下の問に答えよ．

(1) 線形写像 $f : V \to V$ が対称でかつ逆写像 f^{-1} を持つとき，f^{-1} もまた対称であることを示せ．(f^{-1} が線形写像であることは示さなくてよい.)

(2) $e_1, \ldots, e_n$ を V の正規直交基底とする．このとき，線形写像 $f : V \to V$ が対称ならば，基底 $e_1, \ldots, e_n$ に関する f の表現行列 A は対称行列であることを示せ．

(3) 任意の線形写像 $f : V \to V$ に対して，

$$(f(v), w) = (v, g(w)), \quad v, w \in V$$

をみたす線形写像 $g : V \to V$ が一意的に存在することを示せ．

3 実関数

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

に対して，$f(x)$ の $x = 0$ を中心とするテイラー展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a_0, a_1 を求めよ．

(2) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，a_n を求めよ．

(3) ベキ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を求めよ．

4 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S を

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-z)^2 + z^2 = 1\}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 曲面 S は有界閉集合であることを示せ．

(2) 4 変数の実関数 $F(x, y, z, \lambda)$ を

$$F(x, y, z, \lambda) = 2yz + \lambda\{x^2 + (y-z)^2 + z^2 - 1\}$$

と定め，F_x, F_y, F_z をそれぞれ関数 F の x, y, z に関する偏導関数とする．方程式

$$F_x(x, y, z, \lambda) = F_y(x, y, z, \lambda) = F_z(x, y, z, \lambda) = 0$$

を，λ を定数として x, y, z に関する連立一次方程式とみなすとき，この方程式が $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つ実数 λ をすべて求めよ．

(3) 曲面 S 上において，関数 $f(x, y, z) = 2yz$ が最大値をとるすべての点 (x, y, z) および最大値を求めよ．