2016年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2015 年 7 月 25 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V, W を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V の双対空間 V^* を次で定まる $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする．

$$V^* : V \text{ から } \mathbb{C} \text{ へのすべての線形写像のなすベクトル空間.}$$

また，線形写像 $f : V \to W$ に対して，線形写像 $f^* : W^* \to V^*$ を次で定める．

$$f^*(h) = h \circ f, \quad h \in W^*.$$

以下の問に答えよ．

(1) V の基底 $e_1,\ldots,e_n$ に対して, $e_1^*,\ldots,e_n^* \in V^*$ を条件

$$\text{任意の } i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対して，} \; e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

をみたすものとする．このとき，$e_1^*,\ldots, e_n^*$ は V^* の基底となることを示せ.

(2) $f : V \to W$ が全射であるならば，f^* は単射であることを示せ．

(3) $f : V \to W$ が単射であるならば，f^* は全射であることを示せ．

2 $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y), (x', y') に対して，

$$(x, y) - (x', y') = (x - x', y - y'), \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と定める．以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{R}^2$ の有界閉集合上の連続関数のみたす性質は，どのようなものを用いるか明記した上で証明せずに用いてよい．

(1) 実関数 $f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続で，ある点 (x_0, y_0) に対して $f(x_0, y_0) > 0$ であり，また $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x, y) = 0$ をみたすとする．このとき，$f(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で最大値を持つことを示せ．

(2) 実関数 $g(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級で，

$$\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad \lim_{\|(x,y)\| \to \infty} \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$$

をみたすとする．このとき，ある定数 $L > 0$ が存在して，任意の $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$|g(x, y) - g(x', y')| \leq L\|(x, y) - (x', y')\|$$

が成り立つことを示せ．

3 $0 < a < 1$ を定数として，複素関数 $f(z) = \dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ における $f(z)$ の特異点をすべて求めよ．

(2) 実数 $R > 0$ に対して，複素平面上で 4 点 R, $R+2\pi i$, $-R+2\pi i$, $-R$ を頂点とする長方形の周に反時計回りの向きを入れた積分路を Γ_R で表す．このとき，積分

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

の値を求めよ．

(3) 広義積分 $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ の値を求めよ．

4 (X,d) を d を距離とする距離空間として，$a \in X$ と正の実数 r に対して

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a,x) < r\}$$

とおき，これを a を中心とする半径 r の開球と呼ぶ．以下の問に答えよ．

(1) X の部分集合 U が開集合であることの定義を開球を用いて述べよ．

(2) 距離空間 (X,d) 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x_\infty \in X$ に収束することの定義を開球を用いて述べよ．

位相空間 X の部分集合 K は次の性質をみたすとき，X の中でコンパクトであるという．

「$K \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ をみたす X の任意の開集合族 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，Λ の有限部分集合 Λ_0 で $K \subset \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda_0} U_\lambda$ をみたすものが存在する．」

以下の問はこの定義にもとづいて答えよ．

(3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離空間 (X,d) 内の点列で $x_\infty \in X$ に収束しているとする．このとき，

$$A = \{x_n \mid n = 1,2,\dots\} \cup \{x_\infty\}$$

は X の中でコンパクトか．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげそれが反例になっていることを示せ．

(4) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は距離空間 (X,d) 内の点列で $x_\infty \in X$ に収束しているとする．このとき，

$$B = \{x_n \mid n = 1,2,\dots\}$$

は X の中でコンパクトか．そうならば証明し，そうでなければ反例をあげそれが反例になっていることを示せ．

 （以上）