2015年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2015 年 2 月 5 日（木）9:00〜12:00

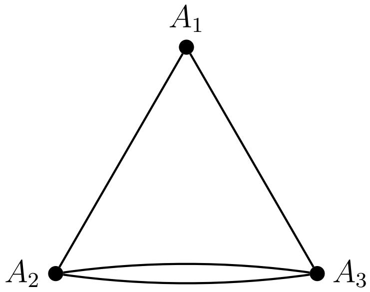
注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 下の図のような頂点 A_1, A_2, A_3 とそれらを結ぶ辺からなるグラフを考える．頂点 A_i を端点に持つ辺の数を m_i，頂点 A_i と頂点 A_j を両端に持つ辺の数を k_{ij} とするとき，$p_{ij} = k_{ij}/m_i$ と定め，それらを成分にもつ 3 次正方行列 $P = (p_{ij})$ を考える．



以下の問に答えよ．

(1) 行列 P を求め，そのすべての固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ．

(2) 自然数 n と $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して $x_n = P^n x_0$ とおくとき，極限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

2 V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とし，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ を V の一次独立なベクトルとする．また，実数 a, b に対して

$$\mathbf{y}_1 = 2\,\mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4, \qquad \mathbf{y}_2 = 2\,\mathbf{x}_1 + a\,\mathbf{x}_2 - 4\,\mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$$

$$\mathbf{y}_3 = -\,\mathbf{x}_1 + 2\,\mathbf{x}_2 + b\,\mathbf{x}_3 + 2\,\mathbf{x}_4, \quad \mathbf{y}_4 = 2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + 4\,\mathbf{x}_3 + 5\,\mathbf{x}_4$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$ が一次独立であるための，a, b の必要十分条件を求めよ．

(2) $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ が一次従属であるための，a, b の必要十分条件を求めよ．

3 $t > 0,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x,y) = \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{t}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 正の側から t が 0 に近づくときの極限

$$\lim_{t\to+0} u(t,x,y)$$

が収束するための $x,\ y$ に関する条件を求めよ．また，その極限値を求めよ．

(2) 重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} u(t,x,y)\,dxdy$$

の値を求めよ．

(3) すべての $t > 0,\ x,\ y \in \mathbb{R}$ に対して等式

$$k\,\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y)$$

が成立するように，定数 k の値を定めよ．

4 平面上の曲線 $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 + x - y - 4 = 0\}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) 点 (x, y) が C 上を動くとき，(x, y) と原点 $(0, 0)$ との距離の最大値は存在しないことを示せ．

(2) 点 (x, y) が C 上を動くとき，(x, y) と原点 $(0, 0)$ との距離の最小値を求めよ．