2015年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2014 年 7 月 26 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 複素数を係数とする x についての 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線形空間を V とする．以下の問に答えよ．

(1) 複素数 m に対して，V の線形変換 T_m を $T_m(f(x)) = mf(x) - 2f(1)x^2 + f(2)x$ で定めるとき，V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関する T_m の表現行列を求めよ．

(2) V の線形変換 T_m を (1) で定めたものとするとき，$T_m(f(x)) = 0$ をみたす V の元 $f(x)$ で 0 でないものが存在する m をすべて求めよ．また，その各 m に対して，$T_m(f(x)) = 0$ となる $f(x)$ をすべて求めよ．

2 P を $\mathbb{R}^3$ における原点を含む平面とし，$\mathbb{R}^3$ の点を平面 P に関して対称な点に写す写像を $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x \in \mathbb{R}^3$ とするとき，$\varphi(x)$ を平面 P の単位法線ベクトル n を用いて表せ．また，写像 φ は線形写像であることを示せ．

(2) 線形写像 φ の固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 累次積分

$$\int_1^2 dy \int_{\sqrt{y-1}}^1 \frac{xy}{1+x^2} \exp\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right) dx + \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{xy}{1+x^2} \exp\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right) dy$$

の値を求めよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x,y) = (2+x^2+y^2)^{xy}$$

に対して，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

が成立するように，2 次多項式 $p(x,y)$ を定めよ．

4 以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ は C^2 級であるものとし，$\mathbb{R}$ 上の関数 $F(t)$ を

$$F(t) = f(2 - e^{-t}\cos t, 1 + e^{-t}\sin t)$$

で定義する．このとき，$F''(0)$ を f の偏導関数の値を用いて表せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $g(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^3 - 4y^3 + 4x^2$ の極値を求めよ．

（2014 年 7 月 26 日） （以上）