2014年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2014 年 2 月 6 日（木）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 λ と μ を異なる複素数とし, 3 次の複素正方行列 A は

条件 1: $(A-\lambda I)^2 \neq O, \quad A-\mu I \neq O$

条件 2: $(A-\lambda I)^2(A-\mu I) = O$

をみたすとする. ただし, I は単位行列, O は零行列である. 以下の問に答えよ.

(1) λ と μ は A の固有値であることを示せ. また, A の固有値はこれらで尽くされることを示せ.

(2) $\mathrm{Ker}\ (A-\lambda I)^2 \cap \mathrm{Ker}\ (A-\mu I) = \{0\}$ を示せ.

(3) 任意の $u \in \mathbb{C}^3$ に対して

$$u - \frac{1}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2 u \in \mathrm{Ker}\ (A-\lambda I)^2$$

であることを示せ.

(4) 直和分解

$$\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}\ (A-\lambda I)^2 \oplus \mathrm{Ker}\ (A-\mu I)$$

が成り立つことを示せ.

2 $\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^2 級の実数値関数 $f(x,y)$, および異なる 2 点 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\mathbb{R}^2$ を結ぶ線分

$$\gamma(t)=\big((1-t)a_1+ta_2,(1-t)b_1+tb_2\big)\qquad(0\le t\le 1)$$

を考え, それらの合成関数を $F(t)=f(\gamma(t))$ とおく. 以下の問に答えよ.

(1) 2 階導関数 $F''(t)$ を f の 2 階偏導関数 f_{xx},f_{xy},f_{yy} と a_1,a_2,b_1,b_2 で表せ.

(2) f が線分 $\{\gamma(t)|\ 0\le t\le 1\}$ の近傍で $f_{xx}>0$ かつ $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$ をみたすとき, 任意の $t\in(0,1)$ に対して $F''(t)>0$ が成り立つことを示せ.

(3) (2) と同じ仮定のもとで,

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2},\frac{b_1+b_2}{2}\right)<\frac{f(a_1,b_1)+f(a_2,b_2)}{2}$$

が成り立つことを示せ.

3 $R>0$ とする．複素平面において

$$\Gamma_{1,R}=[0,R], \qquad \Gamma_{2,R}=\left\{Re^{i\theta} \mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}, \qquad \Gamma_{3,R}=\{re^{\pi i/4} \mid 0\le r\le R\}$$

からなる閉曲線に反時計回りの向きを入れた積分路を Γ_R で表す．以下の問に答えよ．

(1) 積分 $\displaystyle\int_{\Gamma_R} e^{-z^2}dz$ の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_{2,R}} e^{-z^2}dz=0$ を示せ．

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ix^2}dx$ は収束することを示し，その値を求めよ． 必要ならば，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてよい．

4 E, F を $\mathbb{R}^2$ の空でない部分集合とし, これらに対して

$$\rho(E,F) = \inf\{\|u - v\| \mid u \in E, v \in F\}$$

と定める. ただし, $\mathbb{R}^2$ のベクトル $w = (x, y)$ に対して $\|w\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする. 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\| = \rho(E,F)$ をみたす点列 $\{u_n\} \subset E$ と $\{v_n\} \subset F$ が存在することを示せ.

(2) E が有界集合であるとき, 正の整数からなる狭義単調増加列 $\{n_k\}$ が存在して, (1) の点列 $\{u_n\}$ と $\{v_n\}$ のそれぞれの部分列 $\{u_{n_k}\}$, $\{v_{n_k}\}$ はいずれも $k \to \infty$ で収束することを示せ.

(3) E が有界閉集合, F が閉集合であるとき,

$$\rho(E,F) = \min\{\|u - v\| \mid u \in E, v \in F\}$$

となることを示せ.

(4) E, F が共に閉集合であっても, $\min\{\|u - v\| \mid u \in E, v \in F\}$ が存在しない例を挙げ, それがそのような例になっている理由を述べよ.