2013年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2013 年 2 月 7 日（木）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 U, V を

$$U = \mathbf{a} + \langle\{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}\rangle_{\text{span}}\ ,\ V = \mathbf{b} + \langle\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}\rangle_{\text{span}}$$

で定義する．ただし，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 S によって生成される部分空間を $\langle S\rangle_{\text{span}}$ で表し，ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$ と部分空間 $W \subset \mathbb{R}^4$ に対し，$\mathbf{c} + W$ を $\mathbf{c} + W = \{\mathbf{c} + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$ で定義する．次の問に答えよ．

(1) $\langle U\rangle_{\text{span}}$ の定義方程式，すなわち $\langle U\rangle_{\text{span}}$ が解集合となる連立 1 次方程式を求めよ．

(2) $\mathbf{x} \in V$ で，$\langle\{\mathbf{x}\}\rangle_{\text{span}} \cap U \neq \emptyset$ をみたすものをすべて求めよ．

2 $\mathbb{R}^3$ の標準的なユークリッド内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表す．$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ をこの内積に関する正規直交基底とする．線形写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_2$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) 線形写像 f の基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ に関する表現行列を求めよ．

(2) 線形写像 f の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

(3) 線形写像 f の標準基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する表現行列 A は対称行列であることを示せ．

(4) A の固有値, 固有ベクトルを求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 極限

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

を求めよ．

(2) $D = \{(x, y) | x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^3 + y^3 \leq 1\}$ とする．積分

$$\iint_D x^8 y^5 \, dxdy$$

の値を求めよ.

4

(1) 関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ の $x=y=1$ におけるテイラー展開を

$$f(x,y)=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)+R_2(x,y)$$

の形で表せ（残余項 $R_2(x,y)$ を適当な形で表せ）.

(2) 曲面 $z=\log(x^2+y^2)$ の概形を描け.

(3) $x=y=1$ において x が 0.003 増加し，y が 0.002 減少したとき，$z=\log(x^2+y^2)$ の変化量を小数第 3 位まで求めよ．また，計算の根拠となる誤差の評価を述べよ.