2013年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2012 年 7 月 28 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ **の 4 題すべてに解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 a を実数とし, 行列 $A = A_a$ を

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 2-2a & -2+2a \\ -1-a & -3+2a & 2-2a \\ -1-a & -3+a & 2-a \end{pmatrix}$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(1) $a = 1$ のとき A は対角化可能であることを示せ.

(2) $a \neq 1$ のとき A のジョルダン標準形を求めよ.

(3) $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^3$ の標準的なユークリッド内積とする. 勝手な $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し数列 $\{\langle \mathbf{x}, A^n \mathbf{y} \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ が有界であるための a についての条件を求めよ.

2 変数 x, y についての C^2 級関数 $f(x, y)$ と高々2次の多項式 $p(x, y)$ に対し

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - p(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

が成り立つとする.

(1) $p(x, y)$ を f および f の (高階) 偏微分係数を用いて表せ（答のみでよい）.

(2) $r > 0$ に対し $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} p(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\, d\theta$ を計算せよ.

(3) 任意の $r > 0$ に対して $f(0,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\, d\theta$ が成り立つならば $f_{xx}(0,0) + f_{yy}(0,0) = 0$ となることを示せ.

3 自然数 $n \geq 2$ と正数 $R > 0$ に対し，$\gamma_{1,R} = [0, R]$，$\gamma_{2,R} = \{Re^{i\theta} \,|\, 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\}$，$\gamma_{3,R} = \{re^{2\pi i/n} \,|\, 0 \leq r \leq R\}$ とおき，これらをつなげた閉曲線に反時計回りに向きをつけたものを γ_R とする．

(1) $R > 1$ のとき，積分 $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_{2,R}} \frac{dz}{z^n + 1} = 0$ を示せ．

(3) 積分 $\displaystyle I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{x^n + 1}$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

4 a_0, a_1, a_2 を実数，a_3 を正の実数とし，多項式 $f(x,y) = f_{a_0,a_1,a_2,a_3}(x,y)$ を

$$f(x,y) = a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3$$

により定める．また，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $C = C(a_0,a_1,a_2,a_3)$ を

$$C = \{(x,y) \mid x,y \geq 0,\ f(x,y) = 1\}$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) C が有界集合であるなら，関数 x^2+y^2 は C 上での最大値を持つ．このことの理由を説明せよ．

(2) $\alpha \geq 0$ とする．直線 $y = \alpha x$ が C と交わるための $a_0, a_1, a_2, a_3, \alpha$ に対する必要十分条件を求め，そのときの交点を求めよ．

(3) $\mathcal{L}$ を傾き $\alpha \geq 0$ の直線 $y = \alpha x$ 全体よりなる集合とする．C が任意の $L \in \mathcal{L}$ と交わることと C が有界集合であることは同値であることを示せ．

(4) C が有界集合であるような (a_0,a_1,a_2,a_3) 全体よりなる $\mathbb{R}^4$ の部分集合を A とおく．A は開集合であることを示せ．