

**2013年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題**

午前の部

2012年7月28日（土）9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて**4枚1組**である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。**①**、**②**、**③**、**④**の4題すべてに解答すること。
4. 答案用紙は**4枚1組**である。各自確認すること。ホッチキスを外しては**ならない**。
5. 答案用紙は、1枚目が**①**用、2枚目が**②**用、3枚目が**③**用、4枚目が**④**用となっている。間違えないこと。
6. **すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表す。

1 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2+t & 4+2t \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2+t & 2+2t \end{pmatrix}$$

で定め、行列を左から縦ベクトルにかける演算により、 A は \mathbb{R}^4 から \mathbb{R}^3 への線形写像、 B は \mathbb{R}^3 から \mathbb{R}^4 への線形写像と考える。ただし、 t は実数とする。以下の間に答えよ。

- (1) 核 $\text{Ker } A$ と像 $\text{Im } B$ の次元を求めよ。
- (2) \mathbb{R}^4 の部分空間 $\text{Ker } A + \text{Im } B$ の次元を求めよ。
- (3) $\text{Ker } A = \text{Im } B$ となるような t の値を求めよ。

2 $n \geq 2$ を整数とし, A を n 次実対称行列, $b \in \mathbb{R}^n$ とする. \mathbb{R}^n 上の関数 f を

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

により定める. ただし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbb{R}^n 上の標準的な内積を表す.

- (1) 点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ において f が極値をもつならば, $Ax^* = b$ が成り立つことを示せ.
- (2) A のすべての固有値が正であるとき, f はただ一つの点で最小値をとることを示せ.

3 以下の問に答えよ.

- (1) 実数を動く変数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ を満たすとき, 関数 $f(x, y) = xy$ の最大値と最小値を求めよ.
- (2) 関数 $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ の, $x = 1$ におけるテイラー展開を $(x-1)^2$ の項まで求めよ.

4 以下の問に答えよ.

(1) $q > p > 0$ に対し, 部分積分を用いて

$$\left| \int_p^q \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{p}$$

を示せ.

(2) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

は収束することを示せ.

(3) 広義積分

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

は収束するか? 根拠とともに述べよ.