2012年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2011 年 7 月 23 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**4 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ **の 4 題すべてに解答すること**．
4. 答案用紙は**4 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{1}$ **用，2 枚目が** $\boxed{2}$ **用，3 枚目が** $\boxed{3}$ **用，4 枚目が** $\boxed{4}$ **用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること**．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}^4$ の 2 本のベクトル $\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ が生成する部分空間を V，3 本のベクトル $\begin{pmatrix}t+1\\t-1\\t+1\\t-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t+2\\t\\t+1\\t+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t+3\\t+1\\t+2\\t+1\end{pmatrix}$ が生成する部分空間を W_t とする．ただし，t は実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 a, b, c, d についての連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\\1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ を解け．

(2) V が解空間となる連立 1 次方程式を一組求めよ．

(3) W_t が解空間となる連立 1 次方程式を一組求めよ．

(4) 部分空間 $V \cap W_t$ の基底と次元を求めよ．

2 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \\ -8 & 8 & 1 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，複素線型空間 $\mathbb{C}^3$ における線型写像 T を $T(v) = Av$ $(v \in \mathbb{C}^3)$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) T の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) T の固有値 λ に対応する固有空間を $V_\lambda \subset \mathbb{C}^3$ とするとき，$\mathbb{C}^3$ はV_λ の直和で表されることを示せ．

(3) $v \in \mathbb{C}^3$ に対して，それを固有空間の元の和で表したときの V_λ 成分を v_λ とする．対応 $v \mapsto v_\lambda$ で定められる線型写像

$$p_\lambda : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$

の標準基底に関する表現行列を，各固有値に対して求めよ．

3 以下の問に答えよ.

(1) 二変数関数 $\cos\left(\dfrac{x}{1+y^2}\right)$ の原点のまわりでのテーラー級数を x, y について 4 次の項まで求めよ.

(2) 関数 $f(x,y) = x^2 + 2x^2y - xy^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$ が極値をもつかどうか調べよ.

(3) 平面内の領域 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq y\}$$

で定めるとき，積分

$$\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

の値を求めよ.

4 正の整数 a, b, n で $a < b$ を満たすものに対して,

$$S_n(a,b) = \frac{1}{an+1} + \frac{1}{an+2} + \cdots + \frac{1}{bn-1} + \frac{1}{bn}$$

と置く．以下の問に答えよ.

(1) $\log \dfrac{bn+1}{an+1} < S_n(a,b) < \log \dfrac{b}{a}$ を示せ.

(2) $S(a,b) = \lim_{n\to\infty} S_n(a,b)$ を求めよ.

(3) (2) で求めた $S(a,b)$ を使って表される級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} S(k^2, k^2+1)$$

が収束するか否か調べよ.