2011年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午後の部

2011 年 2 月 8 日（火）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元線型空間とし, $I : V \to V$ を恒等写像, $O : V \to V$ を零写像とする. このとき以下の問に答えよ.

(1) 線型写像 $p, q : V \to V$ が

$$p + q = I,$$

$$p^2 = p,\ q^2 = q$$

を満たすとする．このとき

$$pq = qp = O$$

となることを示せ. また, $U = \ker(p - I)$, $W = \ker(q - I)$ とすると, V は部分空間 U, W の直和となることを示せ.

(2) 線型写像 $f : V \to V$ が対角化可能で, 異なる固有値は２つしかないとする. α, β をその固有値とするとき, (1) を満たす p, q が存在し, $f = \alpha p + \beta q$ となることを示せ.

2 A を固有値がすべて正の $n \times n$ 実対称行列とし, $\mathbb{R}^n$ 上の関数 Q_A を

$$Q_A(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とする. α を実数とするとき, 広義積分

$$\int_{0 < x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{Q_A(x_1, \ldots, x_n)}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx_1 \cdots dx_n$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ のとき, 上の広義積分が収束する α を決定し, 積分値を求めよ.

(2) n が一般のときに, 上の広義積分が収束する α を決定せよ.

3 複素平面 $\mathbb{C}$ 内の点列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各項が 0 でなく,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^2} < \infty$$

をみたすものとする. 以下の問に答えよ.

(1) $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{C}$ 内に集積点をもたないことを示せ.

(2) $|z| < \frac{1}{3}$ のとき

$$|\log(1+z) - z| \leq 2|z|^2$$

を示せ. ただし, $\log(1+z)$ は主値を表すものとする.

(3) $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right) e^{\frac{z}{\alpha_n}}$$

は収束し, $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数となることを示せ.

4 以下の問に答えよ．

(1) x を実数とする．このとき二重極限

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}(\cos(\pi\, m!\, x))^{2n})$$

が存在することを示せ．

(2) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で定義された実数値関数とする．$f(x)$ が $x=a$ で連続でないことを ε-δ 論法で表現せよ．

(3) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}(\cos(\pi\, m!\, x))^{2n})$$

で定める．$g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上連続になるか，ε-δ 論法を用いて判定せよ．