

2011年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第2次募集）

午前の部

2011年2月8日（火）9:00～12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を除いて4枚1組である。試験開始後に各自確認すること。乱丁、落丁、印刷不鮮明な箇所などがあれば、ただちに監督者に申し出ること。
3. 問題は全部で4題ある。①、②、③、④の4題すべてに日本語または英語で解答すること。
4. 答案用紙は4枚1組である。各自確認すること。ホッチキスを外してはならない。
5. 答案用紙は、1枚目が①用、2枚目が②用、3枚目が③用、4枚目が④用となっている。間違えないこと。
6. すべての答案用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること。
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが、その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること。
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合、あるいは計算用紙が足りなくなった場合は、監督者に申し出ること。
9. 試験終了後に提出するものは、4枚1組の答案用紙である。この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい。

記号について：

問題中の \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数, 有理数, 実数, 複素数全体のなす集合を表す。

1 \mathbb{R}^4 の 2 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を V , 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} t+4 \\ t \\ t+2 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t+3 \\ t \\ t+1 \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t+2 \\ t+2 \\ t \\ t+2 \end{pmatrix}$$

が生成する部分空間を W で表す. ただし, t は実数とする. 以下の間に答えよ.

- (1) W の次元を求めよ.
- (2) $V + W$ の次元を求めよ.
- (3) $V \cap W$ の次元を求めよ.

2

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + d = 0 \right\}$$

とし, V を行列の加法, スカラー倍により \mathbb{R} 上の線型空間とみなす. 以下の間に答えよ.

(1) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ は V の基底であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ を V の元とする. $X \in V$ に対し

$$F_A(X) = AX - XA$$

とすると, F_A は V から V への線型写像になることを示せ. さらに, (1) の基底に関し F_A を行列表示せよ.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき, F_A の固有値, 固有ベクトルを求めよ.

3 以下の問に答えよ.

- (1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$ とするとき, 二重積分

$$\int_D xy \, dx \, dy$$

の値を求めよ.

- (2) $(1, 1)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の開円板上で定義された C^1 級の実関数 $z = f(x, y)$ が方程式

$$x^2y + yz + z^3x = 3$$

を満たすとする. このとき $f(x, y)$ の $(x, y) = (1, 1)$ における偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$$

を求めよ.

- (3) 関数 $g(x) = \frac{1}{\cos x}$ を $x = 0$ のまわりでテイラー展開し, x について 4 次の項まで求めよ.

4 a を実数とし, 関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = xy + ay^2 - x^3$$

で定める. $f(x, y)$ の \mathbb{R}^2 における極値およびそれを与える点を求めよ.