2011年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2010 年 7 月 24 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ ， $\boxed{\mathbf{4}}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間, n をその次元とし，$f : V \to V$ は線型写像とする．$f^k = 0$ となる整数 $k \geq 1$ が存在するとき, 以下の問に答えよ．

(1) f の固有値はすべて 0 であることを示せ.

(2) $n = 3$ のとき, f のジョルダン標準形はどのようになるか.

(3) $I_V + f$ は全単射であることを示せ. ただし I_V は V の恒等写像とする.

2 $u(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^2 級の実数値関数で

$$u(x+m,y+n)=u(x,y) \quad (\ \forall (m,n)\in\mathbb{Z}^2\ ),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

をみたすものとする．以下の問に答えよ．

(1) $u(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上有界な関数であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $v(x,y)$ を

$$v(x,y)=-\int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(s,y)ds+\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)dt$$

で定義する．$v(x,y)$ は C^1 級であり

$$(-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),\frac{\partial u}{\partial x}(x,y))=(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\frac{\partial v}{\partial y}(x,y))$$

となることを示せ.

(3) 複素数 z の実部を x, 虚部を y とする. $v(x,y)$ を (2) で定義された関数とし,

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

とする. $f(z)$ は z の関数として $\mathbb{C}$ 全体で正則であることを示せ.

(4) $f(z)$ は定数関数であることを示し, $u(x,y)$ が定数関数であることを導け.

3 複素平面内における半径 $\rho > 0$ の上半円周を

$$C_\rho = \left\{\rho e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\right\}$$

で表すものとする．C_ρ には反時計回りの向きが入っているものとする．$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $f(z)$ が

$$f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz}}{z^3}$$

で与えられるとき, 以下の問に答えよ．

(1) $r > 0$ を固定する. このとき閉曲線 γ_R に沿っての複素積分

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz$$

を求めよ. ただし, $R > r$ とし, γ_R は以下の曲線 $\gamma_{1,R}, \ldots, \gamma_{4,R}$ を順に結び定義されるものとする:

$\gamma_{1,R} = [r, R]$ (r から R まで), $\gamma_{2,R} = C_R$ (R から $-R$ まで),
$\gamma_{3,R} = [-R, -r]$ ($-R$ から $-r$ まで), $\gamma_{4,R}$: C_r と逆向きに $-r$ から r まで

(2) $r > 0$ のとき等式

$$\int_r^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{i}{8} \int_{C_r} f(z)dz$$

を示せ. ただし, 左辺の積分は広義積分とする.

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

の値を求めよ.

4 X, Y を集合とし, $F: X \to Y$ を写像とする. 以下の問に答えよ.

(1) X の部分集合 A と Y の部分集合 B に対して

$$F(A) = \{F(x) \mid x \in A\},\ F^{-1}(B) = \{x \in X \mid F(x) \in B\}$$

とおくとき, 次の主張 (a), (b) について, 正しければ証明し, 誤りならば反例をあげよ.

(a) $F(A_1 \cap A_2) = F(A_1) \cap F(A_2)$.

(b) $F^{-1}(B_1 \cap B_2) = F^{-1}(B_1) \cap F^{-1}(B_2)$.

(2) X が空集合でなく, $F: X \to Y$ が単射ならば Y から X への全射が存在することを示せ.