2011年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2010 年 7 月 24 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を A により定まる線型写像とする. 以下の問に答えよ.

(1) f_A の像 $U = f_A(\mathbb{R}^3)$ の次元を求めよ. ただし, 計算のあらましも記述すること.

(2) 像 U に対し $U^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 |\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in U)\}$ とするとき, $U^{\perp}$ の基底を一組求めよ. ただし, $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{u}$ の $\mathbb{R}^4$ での内積とする.

(3) 実数 a, b に対し $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b - 3a \\ 2 \end{pmatrix}$ とする. U と $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ が $\mathbb{R}^4$ を生成するための a, b についての条件を求めよ.

2 行列, ベクトルは実数成分であるものとし, ベクトル $\mathbf{v}$ の大きさを $||\mathbf{v}||$ で表す. 以下の問に答えよ.

(1) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルは単位ベクトルとし, 第一成分は非負とする.

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \neq 0$ なら $A\mathbf{x} \neq 0$ となることを示せ.

(3) $\mathbf{x} \neq 0$ のとき

$$F(\mathbf{x}) = \frac{A\mathbf{x}}{||A\mathbf{x}||}$$

とする. (1) で求めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$, 対応する単位固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とする. $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し

$$\mathbf{x}_0 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n) \quad (n \geq 0)$$

でベクトルの列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を帰納的に定義する. $\mathbf{x}_n$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ の一次結合として表示し, 係数を $a_1,\ a_2,\ a_3$ で表せ.

(4) (3) で与えた $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対し極限 $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ が存在し, A の固有ベクトルになることを示せ.

3 以下の問に答えよ．

(1) 二変数関数 $(1+x\sin y)^{-1}$ の原点のまわりでのテーラー展開を x, y について 3 次の項まで求めよ．

(2) 関数 $f(x,y,z) = \dfrac{3}{1+x^2}\log(1+e^y+z^2) - y \quad (x,y,z \in \mathbb{R})$ に対して

$$F(t) = f(a\cos t, a\sin t, t^2) \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．ただし，a は実数とする．このとき，$F'(0) = 0$ となる a をすべて求めよ．

(3) 平面内の領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq y \leq x^2 \leq 1\}$ に対して二重積分

$$\iint_D \frac{|x|}{(x^2+y+1)^2}\,dxdy$$

の値を求めよ．

4 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1-x-y)$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ の臨界点をすべて求めよ．ただし，(a,b) が臨界点であるとは $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ が成立することとする．

(2) $R > 0$ のときに $D_R = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$ を半径 R の閉円板とする．このとき $f(x,y)$ の D_R での最大値，最小値が存在し，しかも R が十分大きければ，それらが $\mathbb{R}^2$ における最大値，最小値と一致していることを示せ．

(3) $f(x,y)$ の $\mathbb{R}^2$ での最大値，最小値およびそれらを与える点を求めよ．