2010年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2010 年 2 月 9 日（火）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに日本語または英語で解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して，複素線型空間の間の線型写像 $T_A : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^3, T_B : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^2$ を，$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $T_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で定義する．ここで，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5$$

である．また，それぞれの核を $V = \operatorname{Ker} T_A, W = \operatorname{Ker} T_B$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\dim V, \dim W$ を求めよ．

(2) $V \cup W$ と $V + W$ のうち，$\mathbb{C}^5$ の部分空間となるものを決定せよ．

(3) (2) において，部分空間となるものについてその次元を求めよ．

2 実数を係数とする x に関する 2 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線型空間を，

$$V = \{p + qx + rx^2 \mid p, q, r \in \mathbb{R}\}$$

とする．$f = p + qx + rx^2 \in V$（$p, q, r \in \mathbb{R}$）に対して，そのノルム $\|f\|$ を

$$\|f\| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

で定義する．また，線型変換 $T : V \to V$ はある実数 a に対して

$$T(1) = 1 + x, \qquad T(x) = -1 + x^2, \qquad T(1 + ax - x^2) = 0$$

をみたすとし，V の基底 $1, x, x^2$ に関する T の表現行列を A とする．以下の問に答えよ．

(1) A を求めよ．

(2) A の固有値すべてと，それらに対する固有空間を求めよ．

(3) A が対角化可能であるための必要十分条件を，a を用いて表せ．

(4) A は対角化可能であるものとする．線型変換 $T : V \to V$ を n 回合成したものを $T^n : V \to V$ とするとき，V の部分空間 $W = \{f \in V \mid \lim_{n \to \infty} \|T^n(f)\| = 0\}$ の次元を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x) = \log(\cos x)$ に対してテイラーの定理を適用することにより，$|x| \leq \dfrac{\pi}{4}$ において不等式

$$\left| f(x) + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$$

が成立することを示せ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ は C^2 級であるものとする．このとき，関数

$$g(x, t) = \int_0^t f(x, y)\, dy$$

は $\mathbb{R}^2$ 上 C^2 級であることが知られている．$F(x) = g(x, x)$ とおくとき，恒等式

$$F''(x) = a\, f_x(x, x) + b\, f_y(x, x) + c\, g_{xx}(x, x)$$

が成立するような定数 a, b, c を求めよ．

(3) 次の積分値を計算せよ．

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\pi^2 - x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2}\, dy \right) dx$$

4 2変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = 3x^4 + 5y^3 - 3x^2y^2 - 6y^2$$

で定義する．$f(x,y)$ の極値をすべて求めよ．