2010年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午前の部

2009 年 7 月 25 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 複素数 a に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2-a & 1+a & -1 \\ 2-a & -1+a & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\operatorname{rank} A = 1$ となるような a をすべて求めよ．ここで，$\operatorname{rank} A$ は A の階数とする．

(2) $\operatorname{rank} A = 1$ であるとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ．

(3) A が対角化可能でないような a をすべて求めよ．

2 実数を係数とする 3 次以下の多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線型空間を，

$$V = \{p + qx + rx^2 + sx^3 \mid p, q, r, s \in \mathbb{R}\}$$

とする．また，$f(x) \in V$ に対し，

$$T(f(x)) = \frac{1}{x-1}\int_1^x (t-1)f'(t)\,dt$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) \in V$ に対し $T(f(x))$ を対応させる写像 T は，V から V への線型写像を定めることを示せ．

(2) V の基底 $1, x, x^2, x^3$ に関する T の表現行列を求めよ．

(3) $g(x) = p+qx+rx^2+sx^3 \in V$ $(p, q, r, s \in \mathbb{R})$ が与えられたとき，$T(f(x)) = g(x)$ となる $f(x) \in V$ が存在するための p, q, r, s に関する必要十分条件を求めよ．

(4) $k \in \mathbb{R}$ を定数とし，$g(x) = 1-x+kx^2-3x^3 \in V$ とする．このとき，$T(f(x)) = g(x)$ となる $f(x) \in V$ は存在するか調べよ．また，存在する場合にはそのような $f(x) \in V$ をすべて求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) ２変数関数 $f(x,y)=e^{(x+y)\cos(x-y)}$ に対して，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-p(x,y)}{x^2+y^2}=0$$

となるような x,y の２次多項式 $p(x,y)$ を求めよ．

(2) $(x,y)=(a,b)$ のまわりで C^1 級である関数 $g(x,y)$ に対して

$$c=g(a,b),\quad \xi=\frac{\partial g}{\partial x}(a,b),\quad \eta=\frac{\partial g}{\partial y}(a,b),$$

$(u,v,w)=(a,b,c)$ のまわりで C^1 級である関数 $F(u,v,w)$ に対して

$$\alpha=\frac{\partial F}{\partial u}(a,b,c),\quad \beta=\frac{\partial F}{\partial v}(a,b,c),\quad \gamma=\frac{\partial F}{\partial w}(a,b,c)$$

とおく．$G(x,y)=(x,y,g(x,y))$，$H(x,y)=(F\circ G)(x,y)$ とするとき，$\dfrac{\partial H}{\partial x}(a,b)$ および $\dfrac{\partial H}{\partial y}(a,b)$ を $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta$ を用いて表せ．ここで，$F\circ G$ は G と F の合成関数を表す．

(3) 次の積分値を計算せよ．

$$\int_0^2 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{y}{x}\right)dx$$

4 以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > 0$ および $n = 1, 2, \ldots$ に対し，

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

を示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ は，$\alpha > 1$ のとき収束することを示せ．

(3) $\alpha \to \infty$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$$

となることを示せ．

(4) $\alpha > 1$ とする．また，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するものとする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^n$ および $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)^n$ はどちらも収束することを示せ．

(5) さらに (4) において，$\alpha \to \infty$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(a_n + \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)^n - {a_n}^n \right\} \longrightarrow 0$$

となることを示せ．