2009年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題（第 2 次募集）

午前の部

2009 年 2 月 1 日（日）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$, $\boxed{\mathbf{2}}$, $\boxed{\mathbf{3}}$, $\boxed{\mathbf{4}}$ の 4 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{\mathbf{4}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 実線型空間 $\mathbb{R}^5$ の中で，ベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

で生成される部分空間を V とし，ベクトル

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で生成される部分空間を W とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dim V$ および $\dim W$ を求めよ．また，5 つのベクトル v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 の中から適当なベクトルを選び出すことにより V の基底を一組与えよ．それらが基底となることも説明すること．

(2) $\dim(V + W)$ を求めよ．

(3) $\dim(V \cap W)$ を求めよ．

2 $V = M_2(\mathbb{C})$ を複素数を成分とする 2 行 2 列の行列全体のなす複素線型空間とする．

$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in V$ に対し，線型変換 $F : V \longrightarrow V$ を $F(X) = {}^tAXA - X$ で定める．

但し，${}^tA$ は A の転置行列を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) V の基底を適当に定め，その基底に関して F の表現行列を求めよ．

(2) F が単射とならない a の値を求めよ．

(3) a が (2) の値のとき，F は対角化可能か否かを判定せよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) $z \in \mathbb{C}$ に対し，$f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)}$ とおく．$f(z)$ を原点中心で $0 < |z| < 2$ においてローラン展開せよ．

(2) $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数 C^1 級関数 $g(x,y)$ は，単位円周 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 上の任意の点で

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right) \neq (0,0)$$

を満たすとする．いま，

$$x = s^2 - t^2, \quad y = 2st$$

とおき，$\mathbb{R}^2$ 上の関数 $G(s,t)$ を $G(s,t) = g(s^2-t^2, 2st)$ と定義するならば，$G(s,t)$ の極値を与える点は，単位円周 $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2=1\}$ 上には存在しないことを示せ．

(3) (x,y) 平面内の領域

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x \leq 1 - \frac{y^2}{4},\ y \geq 0\right\}$$

を考える．変数変換 $x = s^2 - t^2,\ y = 2st$ (ただし，$s \geq 0,\ t \geq 0$) によって D は (s,t) 平面内のどのような領域にうつされるかを図示せよ．また，重積分

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

の値を求めよ．

4 $p>0$ を正の実数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 任意の $n=3,4,\ldots$ に対し，不等式

$$\int_n^{n+1}\frac{dx}{x(\log x)^p}<\frac{1}{n(\log n)^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x(\log x)^p}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}$ の収束・発散を調べよ．

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ の収束・発散を調べよ．