2009 年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（前期課程）
入学試験問題

午後の部

2008 年 7 月 26 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **4** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 4 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ ， $\boxed{4}$ の **4** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **4** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用，**4** 枚目が $\boxed{4}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
9. 試験終了後に提出するものは，4 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 V を $\mathbb{R}$ 上の有限次元線型空間とし，V 上の線型変換 $F : V \to V$ が $F \circ F = -\mathrm{Id}_V$（$\mathrm{Id}_V$ は V 上の恒等変換を表す）をみたしているとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 0 でないベクトル $v \in V$ に対して，$v, F(v)$ は線型独立であることを示せ．

(2) $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} \in V$ とする．$2k+1$ 個のベクトル $v_1, F(v_1), \ldots, v_k, F(v_k), v_{k+1}$ が線型独立ならば，これに $F(v_{k+1})$ をつけ加えた $2k+2$ 個のベクトルも線型独立となることを示せ．

以下，$v_1, \ldots, v_m \in V$ は，条件

『$v_1, \ldots, v_m, F(v_1), \ldots, F(v_m)$ は線型独立である』

をみたすベクトルの組のうちで，m が最大であるものとする．

(3) $v_1, \ldots, v_m, F(v_1), \ldots, F(v_m)$ は V の基底となることを示せ．

(4) F の基底 $v_1, \ldots, v_m, F(v_1), \ldots, F(v_m)$ に関する表現行列を求めよ．

2 a を実数とする．連立常微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ a-5 & a & 4 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

について以下の問に答えよ．

(1) 行列 A が対角化不可能であるための a の条件を求めよ．またそのとき，A のジョルダン標準形は何か．

(2) (1) のとき，連立常微分方程式 $(*)$ の一般解

$$(\clubsuit) \qquad \mathbb{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

を求めよ．

(3) (1) のとき，連立常微分方程式 $(*)$ の解のうち，$\lim_{t\to+\infty} |\mathbb{X}(t)| = 0$ となるものをすべて求めよ．ただし，$(\clubsuit)$ において $|\mathbb{X}(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}$ とする．

3 $a > 0$ とする．複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + a^2}$$

とおく．ただし $z \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

の分枝は，$0 \leq \arg z < 2\pi$ と定める．$0 < r < a < R$ に対し，複素平面上の二つの半円弧

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$C_r = \{z = re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

および実軸上の閉区間 $[-R, -r], [r, R]$ を考え，向きは，閉曲線 $C_{R,r} = [r, R] \cup C_R \cup [-R, -r] \cup C_r$ に $z = ia$ を中心に反時計回りにより定まるものを考える．以下の問に答えよ．

(1) 複素積分 $\displaystyle\int_{C_{R,r}} f(z)dz$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz$ および $\displaystyle\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)dz$ の値を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_{-R}^{-r} f(z)dz = \int_r^R f(z)dz + \pi i \int_r^R \frac{dx}{x^2 + a^2}$ が成り立つことを示せ．

(4) 以上を用いて，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2}dx$ の値を求めよ．

4 $\mathbb{R}^m$ を m 次元ユークリッド空間とし，2 点 $p, q \in \mathbb{R}^m$ の通常の距離を $|p-q|$ で表す．

(1) $\mathbb{R}^m$ 内の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $a \in \mathbb{R}^m$ に収束することの定義を ϵ-N 論法を用いて述べよ．

いま，$a \in \mathbb{R}^m$ とし，写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ に関する次の二つの条件 (A) (B) を考える．

(A) 任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ となる任意の $x \in \mathbb{R}^m$ に対して $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ が成り立つ．

(B) a に収束する任意の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，点列 $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は $f(a)$ に収束する．

このとき，以下の問に答えよ．

(2) (A) ならば (B) であることを示せ．

(3) 条件 (A) の否定命題を述べよ．ただし,「ない」およびそれに類する否定を表す語句は用いないこと．

(4) (B) ならば (A) であることを示せ．

（2008 年 7 月 26 日） （以上）