名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度前期課程大学院入学試験問題

午後の部

2007 年 7 月 28 日（土）13:00〜16:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**４枚１組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で４題ある．問題１〜問題４の４題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は**４枚１組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**１枚目が問題１用，２枚目が問題２用，３枚目が問題３用，４枚目が問題４用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
7. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
8. 試験終了後に提出するものは，４枚１組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度前期課程大学院入学試験問題

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ．

$\boxed{1}$ V, W を有限次元実線型空間，$F: V \longrightarrow W$, $G: W \longrightarrow V$ を線型写像とし，$G \circ F = \mathrm{Id}_V$（$\mathrm{Id}_V$ は V 上の恒等変換を表す）が成り立っていると仮定する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) F が単射，G が全射であることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}\,F \cap \mathrm{Ker}\,G = \{0\}$ となることを示せ．ただし，$\mathrm{Im}\,F$ は F の像であり，$\mathrm{Ker}\,G$ は G の核である．

(3) $W = \mathrm{Im}\,F \oplus \mathrm{Ker}\,G$ と直和分解されることを示せ．

(4) V の基底 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ $(n = \dim V)$ と W の基底 $\{w_1, \cdots, w_m\}$ $(m = \dim W)$ で，F, G の表現行列がそれぞれ

$$\begin{matrix} & \overbrace{}^{n} \\ \begin{matrix} n\{ \\ m-n\{ \end{matrix} & \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix} \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} & \overbrace{}^{n}\ \overbrace{}^{m-n} \\ n\{ & \begin{pmatrix} I_n & O \end{pmatrix} \end{matrix}$$

の形（ただし，I_n は n 次単位行列，O は零行列を表す）になるものが存在することを示せ．

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ．

(1) 対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

に対して，${}^tPAP$ が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ．

次の (2), (3) では，$\mathbb{R}^3$ 上の関数

$$Q(x,y,z) = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy+2xz-2yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

を考える．また，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ であることを用いてよく，以下の広義積分が収束することは仮定してよい．

(2) $\mathbb{R}^3$ 上の広義積分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-Q(x,y,z)}dxdydz$$

の値を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ 上の広義積分

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} (x^2+y^2+z^2)e^{-Q(x,y,z)}dxdydz$$

の値を求めよ．

$\boxed{3}$ 複素関数

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $f(z)$ の原点におけるローラン展開を求めよ．

(2) 正数 R に対して，上半円弧 C_R を

$$C_R = \{z = Re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

とおいて定め，反時計回りに向きを入れるとき，複素線積分の極限

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) dz$$

を求めよ．

(3) 正数 r に対して，下半円弧 Γ_r を

$$\Gamma_r = \{z = re^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$$

とおいて定め，反時計回りに向きを入れるとき，複素線積分の極限

$$\lim_{r \to 0} \int_{\Gamma_r} f(z) dz$$

を求めよ．

(4) 留数定理を用いて，

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$

の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 以下の問 (A), (B) に答えよ．

(A) $\mathbb{R}^2$ 上の関係 $\sim$ を次のように定義する：

$(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ に対して，$x - x'$, $y - y'$ がともに整数となるとき，
$(x, y) \sim (x', y')$ と表す．

すると，この $\sim$ は $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係となる．この同値関係 $\sim$ による $\mathbb{R}^2$ の同値類全体のなす集合を $\mathbb{T}$ と表し，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の同値類を $\overline{(x, y)}$ と表す．

a, b, c, d がいずれも整数であるとき，

$$f\left(\overline{(x, y)}\right) = \overline{(ax + by, cx + dy)} \qquad (\overline{(x, y)} \in \mathbb{T})$$

によって写像 $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ が定義できること（この定義が well-defined であること）を証明せよ．

(B) X, Y を位相空間とし，$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とする．また，位相空間 Z は，次の性質をもつとき，コンパクトであると定義する：

$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = Z$ をみたす Z の任意の開集合族 $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して，Λ の有限部分集合 Λ_0 で $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} U_\lambda = Z$ をみたすものが存在する．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f : X \longrightarrow Y$ が連続写像であることの定義を，開集合を用いて述べよ．

(2) X がコンパクトであり，$f : X \longrightarrow Y$ が連続な全射であるとき，Y もコンパクトであることを証明せよ．

（２００７年７月２８日）　　　　　　　　　　（以上）