名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度前期課程大学院入学試験問題

午前の部

2007 年 7 月 28 日（土）9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて**４枚１組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で４題ある．問題１〜問題４の４題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は**４枚１組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない**．
5. 答案用紙は，**１枚目が問題１用，２枚目が問題２用，３枚目が問題３用，４枚目が問題４用**となっている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
7. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
8. 試験終了後に提出するものは，４枚１組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００８年度前期課程大学院入学試験問題

午前の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

から定まる実線型空間の間の線型写像を $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $(F(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v})$ とし，その核を $W = \operatorname{Ker} F$，像を $U = \operatorname{Im} F$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) W, U の基底をそれぞれ 1 組求めよ．

以下の (2), (3) では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．また，$\mathbb{R}^4$ には標準的なユークリッド内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとし，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ と表す．

(2) W の直交補空間を $W^{\perp}$ とするとき，

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{b} \in W, \quad \boldsymbol{c} \in W^{\perp}$$

となるベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を求めよ．

(3) $\boldsymbol{w}$ が W を動くときの $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{w}$ の距離 $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{w}\|$ の最小値を求めよ．

$\boxed{2}$ A を零行列でない 3 次実交代行列（つまり，$A(\neq O)$ は実数を成分とする 3 次正方行列であり，${}^tA = -A$ をみたしている）とする．$\mathbb{R}^3$ に値をもつ $\mathbb{R}$ 上の微分可能なベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ が

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

をみたしているとき，以下の問に答えよ．ただし，$\langle \ \ , \ \ \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ 上の標準的なユークリッド内積であり，$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w} \rangle}$ である．

(1) $\|\boldsymbol{x}(t)\|$ は t によらず一定であることを示せ.

(2) 行列 A は 0 を固有値としてもつことを示せ.

(3) $\boldsymbol{v}$ を A の固有値 0 に対する固有ベクトルとするとき，$\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{v} \rangle$ は t によらず一定であることを示せ.

(4) $\boldsymbol{x}(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ は常に $\mathbb{R}^3$ 内のある定円周上にあることを示せ.

$\boxed{3}$ 実数からなる列

$$\cdots, \ a_{-3}, \ a_{-2}, \ a_{-1}, \ a_0, \ a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots$$

が，任意の整数 n に対して

$$(a_{n+1}+1)^2+(a_n-1)^2 \leq 2$$

をみたしているとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が上にも下にも有界であること，つまり，n によらない実数 L, M が存在して，すべての整数 n に対して $L \leq a_n \leq M$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限 $\lim_{n\to-\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在することを示せ．

(3) 実は，すべての整数 n に対して $a_n = 0$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ．(1), (3), (4) では，答えだけでなく，理由も簡単に説明すること．

(1) $f(x,y) = e^{2x+3y}$ に対して，x, y の 2 次多項式 $g(x,y)$ で

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - g(x,y)}{x^2 + y^2} = 0$$

をみたすものを求めよ．

(2) $f(x,y)$ を第 1 象限 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ で定義された C^1 級関数とする．$f(x,y)$ がある 1 変数関数 $g(t)$ を用いて $f(x,y) = g(xy)$ と表されることと，$x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ が成り立つことが，同値であることを示せ．(必要ならば，$s = x$, $t = xy$ なる変数変換を考えよ.）

(3) a, b を正数とする．広義積分

$$\int_0^\infty \frac{r^{2b}}{1 + r^{2a}} dr$$

が収束するための，a, b に関する条件を求めよ．

(4) a, b を正数とする．第 1 象限 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ 上の広義積分

$$\iint_D \frac{x^{2b} + y^{2b}}{1 + x^{2a} + y^{2a}} dxdy$$

が収束するための，a, b に関する条件を求めよ．

（２００７年７月２８日）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（以上）