名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００７年度前期課程大学院入学試験問題（２次募集）

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ $x,\ y$ を実数を動く変数とし，2 変数関数

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

を考える.

(1) f の臨界点（つまり $f_x = f_y = 0$ となる点）をすべて求めよ.

(2) 上で求めた臨界点が，極大点・極小点のどちらになるか，あるいはどちらにもならないか，それぞれの臨界点について，理由をつけて答えよ．ただし，関数 $f(x,y)$ の臨界点 (a,b) が極大点（極小点）であるとは，点 (a,b) のある開近傍 U が存在して U の任意の点 (x,y) において不等式 $f(a,b) \geq f(x,y)$ (極小点のときは $f(a,b) \leq f(x,y)$) が成り立つことと定義する.

（２００７年2月２０日）　　　　（次ページあり）

$\boxed{2}$ R は正の数を表すとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 3 次元空間内の回転体

$$U(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$$

の体積 $u(R)$ を求めよ．

(2) 極限 $\lim_{R\to\infty} u(R)$ を求めよ．

(3) 3 次元空間内の立体

$$V(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq R,\ 0 \leq z \leq e^{-x^2-y^2}\}$$

の体積 $v(R)$ は $\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\right)^2$ で与えられることを示せ．

(4) $\lim_{R\to\infty} (v(R) - u(R)) = 0$ が成り立つことを示せ．

(5) 広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ が存在することを示し，その値を求めよ．

$\boxed{3}$ n 次以下の複素数係数多項式全体のなす複素ベクトル空間を V とする．相異なる $n+1$ 個の複素数 $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ に対して線型写像 ϕ を

$$\phi : V \to \mathbb{C}^{n+1}\ , \quad \phi(P(x)) = \begin{pmatrix} P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_{n+1}) \end{pmatrix}$$

で定義する．

(1) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準基底とする．このとき，各 $i = 1, \ldots, n+1$ に対して，$\phi(P_i(x)) = \boldsymbol{e}_i$ となる $P_i(x) \in V$ を求めよ．ヒント：$f(x)$ が多項式で $f(\alpha) = 0$ ならば $f(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる．

(2) (1) で求めた $\{P_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ は V の基底であることを示し，

$$\begin{pmatrix} 1, & x, & x^2, & \ldots, & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(x), & P_2(x), & P_3(x), & \ldots, & P_{n+1}(x) \end{pmatrix} A$$

を満たす $(n+1)$ 次行列 A を求めよ．

$\boxed{4}$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して線型写像 f を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．

(1) A の固有多項式，固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $f^2(\mathbb{R}^3) = f(f(\mathbb{R}^3))$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $f(\mathbb{R}^3)$ の基底を求めよ．

(4) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\{\boldsymbol{x},\ f(\boldsymbol{x}),\ f^2(\boldsymbol{x})\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底となるための必要十分条件を求めよ．