名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００７年度前期課程大学院入学試験問題（２次募集）

午前の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ $X = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 上の C^2 級関数 $f(x,y)$ を $x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$ により変数変換して $f(x,y) = g(r,\theta)$ とする.

(1) X 上で $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を, $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ と $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ で表せ.

(2) X 上で以下が成立することを示せ.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) g(r,\theta)\ .$$

$\boxed{2}$ 以下の問に答えよ.

(1) 次の 2 重広義積分が収束するような実数 a の範囲と積分の値を求めよ.

$$\iint_D (y-x)^{-a} dxdy \ , \ \ D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x < y \leq 1\} \ .$$

(2) 変数変換 $u = x+y, v = x-y$ によって (x,y)-平面上の領域

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x+y \leq 1, \ 0 \leq x-y \leq 1\}$$

が (u,v)-平面上のどのような領域にうつるかを図示し，次の積分の値を求めよ.

$$\iint_D (x^2-y^2) dxdy \ .$$

$\boxed{3}$ 3次行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ に対して $\mathbb{R}^3$ の線型変換 f を $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．

(1) $f(\mathbb{R}^3)$ は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示し，その基底をひと組を求めよ．

(2) $\dim V = \dim f(V) = 2$ となる $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V のひとつの例を，V の基底を与えることによって求めよ．

(3) $\dim V = 2$, $\dim f(V) = 1$ となる $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V のひとつの例を，V の基底を与えることによって求めよ．

$\boxed{4}$ 対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ において

$$a > 0\ ,\ b > 0\ ,\ a + b = 1$$

とする.

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{v} = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

（２００７年２月２０日）　（以上）