名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００７年度前期課程大学院入学試験問題

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ $P(z) = z^2 + az + b$ を実係数の 2 次式とし，$D = \dfrac{d}{dt}$ を $\mathbb{R}$ 上の関数にはたらく微分とするとき，$P(D)u = \dfrac{d^2u}{dt^2} + a\dfrac{du}{dt} + bu$ によって，$\mathbb{R}$ 上の関数にはたらく $P(D)$ という 2 階の常微分作用素を定義する．いま，実係数の 2 次方程式 $P(z) = 0$ は重根 $t = \lambda$ を持つと仮定する．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $e^{\lambda t}$ は微分方程式 $P(D)u = 0$ の 1 つの解であることを示せ．また，$u(t)$ を微分方程式 $P(D)u = 0$ の任意の解とすると，関数

$$v(t) = e^{-\lambda t}u(t)$$

は t の高々1 次式であることを示せ.

(2) 微分方程式 $P(D)u = 0$ の解空間 V はベクトル空間であることを示し，その基底をひと組求めよ.

(3) 微分方程式 $P(D)u = 0$ のすべての解が $0 \leq t < \infty$ のとき有界にとどまるとする．このとき $a > 0$ であることを示せ.

$\boxed{2}$ V を有限次元の実ベクトル空間，f を V の線型変換とする．

(1) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$ と $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = V$ が同値であることを示せ．

(2)

$$\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2 \subset \mathrm{Ker}\, f^3 \subset \cdots$$

および

$$\mathrm{Im}\, f \supset \mathrm{Im}\, f^2 \supset \mathrm{Im}\, f^3 \supset \cdots$$

を示せ．

(3) ある $n > 0$ が存在して

$$\mathrm{Ker}\, f^n + \mathrm{Im}\, f^n = V$$

となることを示せ．

$\boxed{3}$ $a,\, b$ は $a < b$ を満たす実定数とする．

(1) $x = a, b, \pm\infty$ の付近での関数 $\dfrac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}$ のふるまいを調べることによって，広義積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx$$

が収束するような実数 $p,\, q$ の範囲を求め，それを図示せよ．

(2) $p,\, q$ は (1) で得られた範囲内にあるとする．このとき $p,\, q$ のみに依存する正定数 C が存在して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x-a|^p|x-b|^q}dx < \frac{C}{|a-b|^{p+q-1}}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{4}$ $f : A \to B$ を集合間の写像とし，$g : 2^B \to 2^A$ を

$$g(X) = f^{-1}(X)$$

で定める．ただし，B の部分集合 X に対して $f^{-1}(X)$ は $f : A \to B$ に関する X の逆像，すなわち

$$f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$$

で定義される A の部分集合を意味する．また，集合 A に対して，2^A は，A の部分集合全体のなす集合を指す記号である．

(1) f が全射ならば g は単射であることを示せ．

(2) f が単射ならば g は全射であることを示せ．