名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００６年度前期課程入学試験問題

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ．答えのみでなく解答の筋道も記述すること．

$\boxed{1}$ n を自然数とする．数直線 $\mathbb{R}$ 全体で定義された n 個の関数

$$e^t,\, te^t,\, t^2e^t, \cdots,\, t^{n-1}e^t$$

は体 $\mathbb{R}$ 上１次独立であることが知られている．これらの１次結合として表される関数全体のなす実ベクトル空間を V とし, V の線形変換 $D\colon V \longrightarrow V$ を

$$D(x(t)) = x'(t) \quad (' \text{ は } t \text{ に関する微分を表す})$$

によって定める．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) V の基底 $\mathcal{B} = \{\, e^t,\, te^t,\, t^2e^t, \cdots,\, t^{n-1}e^t \,\}$ に関する D の表現行列を求めよ．

以下の問においては $y(t) = t^{n-1}e^t$ とする．

(2) $y'(t)$, $y''(t)$ を計算し, $\mathcal{B}$ の元の１次結合として表せ．

(3) $\mathcal{C} = \{\, y(t)\,,\, y'(t)\,,\, y''(t)\,, \ldots,\, y^{(n-1)}(t) \,\}$ は V の基底であることを示せ．

(4) $(D - I)^n(y(t)) = 0$ を示せ．ここで I は V の恒等変換である．

(5) (4) を利用して, 基底 $\mathcal{C}$ に関する D の表現行列を求めよ．

$\boxed{2}$ V を n 次元実ベクトル空間とし, V から $\mathbb{R}$ への線形写像全体のなす集合を V^* で表す. $f, g \in V^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して和 $f+g$ とスカラー倍 αf を

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad (x \in V)$$

によって定義することにより, V^* は実ベクトル空間になる. 以下の問に答えよ.

(1) $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の基底とし, φ_k $(k = 1, \ldots, n)$ を

$$\varphi_k(e_i) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

によって定まる V^* の元とする. このとき, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ は V^* の基底であることを示せ.

以下の問においては, V の部分ベクトル空間 W に対して

$$W^\circ = \{ f \in V^* \mid \text{任意の } x \in W \text{ に対して } f(x) = 0 \}$$

とする.

(2) W° が V^* の部分ベクトル空間であること, および

$$\dim W^\circ = n - \dim W$$

が成立することを示せ.

(3) W_1, W_2 が V の部分ベクトル空間のとき,

$$(W_1 + W_2)^\circ = {W_1}^\circ \cap {W_2}^\circ$$

が成立することを示せ.

$\boxed{3}$ 複素数 $c \in \mathbb{C}$ と実数 $\xi \in \mathbb{R}$ に対して, 複素関数

$$f(z) = \frac{e^{i\xi z}}{z - c}, \quad z \in \mathbb{C}$$

を考える. また, 実数 $R > 0$ に対して線分 l_R と二つの半円弧 C_R^+, C_R^- を

$$l_R = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z = t\,,\ -R \leq t \leq R \},$$

$$C_R^+ = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi \},$$

$$C_R^- = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z = Re^{-it},\ 0 \leq t \leq \pi \}$$

で定義し, それぞれパラメータ t の増大する方向に向きを入れる. 更に, l_R と C_R^+ を合わせた向き付き閉曲線を γ_R^+ とし, l_R と C_R^- を合わせた向き付き閉曲線を γ_R^- とする. 以下の問に答えよ.

(1) c の虚部 $\operatorname{Im} c$ が 0 でなく, かつ $|c| < R$ のとき, 以下の複素線積分をそれぞれ求めよ.

$$\int_{\gamma_R^+} f(z)\, dz, \quad \int_{\gamma_R^-} f(z)\, dz.$$

(2) $\operatorname{Im} c \neq 0$ かつ $\xi \neq 0$ のとき, 上の積分の $R \to \infty$ の極限を調べることで, 実軸上の積分

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx$$

を求めよ. その際, 半円弧上の積分の極限についてきちんと議論すること.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{R}^n$ の通常の距離を d で表す. $a \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 r に対して

$$B_r(a) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < r \,\}$$

とおき, これを a を中心とする半径 r の開球とよぶ. また, 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるとは, 任意の $a \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$ が成立することと定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 U が開集合であることの定義を開球を用いて述べよ.

(2) 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続であるための必要十分条件は, $\mathbb{R}^n$ の任意の開集合 U に対して $f^{-1}(U)$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合になることである. これを証明せよ.

(3) $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が連結であるとは,

$$A \subset U \cup V \quad \text{および} \quad U \cap V \cap A = \emptyset$$

を満たす開集合 U, V に対して, 必ず

$$U \cap A = \emptyset \quad \text{または} \quad V \cap A = \emptyset$$

が成り立つことと定義する. 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が連続で $A \subset \mathbb{R}^n$ が連結ならば, $f(A) \subset \mathbb{R}^n$ も連結であることを証明せよ.

（２００５年７月３０日）　（以上）