名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００５年度前期課程入学試験問題

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ 複素数を係数とする t について 2 次以下の多項式全体のなす複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を

$$V = \{p + q\,t + r\,t^2 \mid p, q, r \in \mathbb{C}\}$$

とする．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $\{(1-t)^2, t^2, (1+t)^2\}$ が V の基底かどうか，理由とともに答えよ.

いま，a を複素数とし，V から V への線型写像 $\phi_a : V \to V$ を

$$\phi_a(f(t)) = (t+1)\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + (t-1)\frac{df(t)}{dt} + a\,f(t) \qquad (f(t) \in V)$$

により定義する.

(2) V の基底 $\{1, t, t^2\}$ に関する ϕ_a の表現行列 A を求めよ.

(3) 任意の $g(t) \in V$ に対して $\phi_a(f(t)) = g(t)$ を満たす $f(t) \in V$ が存在するための a に関する必要十分条件を求めよ.

(4) $\phi_a(f(t)) = 2 + t^2$ を満たす $f(t) \in V$ が存在するための a に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{2}$ 隣接３項間の漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たす複素数列を考える．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ に対して，上の漸化式を満たすように a_3 を定めることで $\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ を対応させる．この写像

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

は $\mathbb{C}^2$ から $\mathbb{C}^2$ への線型写像であることを示し，その表現行列 A を求めよ．

(2) 表現行列 A のジョルダン標準形を求めよ．また，$P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となる行列 P をひとつ求めよ．

(3) 上の漸化式を満たす複素数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

$\boxed{3}$ $f(z)$ は原点中心，半径 1 の閉円板を含む領域で正則な複素関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $z = e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ と変数変換し，左辺を z に関する複素積分に書き換えることにより

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos\theta d\theta = \pi f'(0)$$

が成り立つことを示せ.

以下の問 (2), (3) では n を任意の正の整数とする.

(2) $[n/2]$ は $n/2$ を超えない最大の整数を表す．このとき

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n}{j} \frac{f^{(n-2j)}(0)}{(n-2j)!}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 積分

$$\int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos^n\theta \, d\theta$$

の値を求めよ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間とし，$d(x,y)=|x-y|$ を通常の距離とする．$\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列とは，$m\in\mathbb{N}$ について狭義単調増加な自然数列 $n(m)$ をとってきて $\{x_{n(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ と表される $\mathbb{R}^N$ の点列のことと定義する．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が y に収束することの定義を，$\mathbb{R}^N$ における距離 d を用いて述べよ.

(2) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $y\in\mathbb{R}^N$ に収束するならば，任意の部分列 $\{x_{n(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ もまた y に収束することを証明せよ.

(3) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の任意の部分列 $\{x_{n(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ に対して，そのまた部分列 $\{x_{n(m(\ell))}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ が存在して $y\in\mathbb{R}^N$ に収束すると仮定する．このとき，もとの点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も y に収束することを，背理法で示せ.

（２００４年7月３１日）　（以上）