名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００５年度前期課程入学試験問題

午前の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^5$ の中の次の 2 つの部分ベクトル空間 V, W を考える.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{rrrrr} x_1 & & & & -4x_5 = 0 \\ & x_2 & +x_3 & & -x_5 = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & -3x_3 & & -5x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{rrrrr} x_1 & & & +x_4 & -6x_5 = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -3x_5 = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & -5x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) $\dim V, \dim W$ を求めよ.

(2) $\dim(V \cap W)$ を求めよ.

(3) $\dim(V + W)$ を求めよ.

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ を，$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ $(m, k \in \mathbb{Z})$ の形の行列の積で表せ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -b^2 + a & a + 2b & 1 \\ ab & -a & a + b \end{pmatrix}$ が対角化できるかどうかを論ぜよ.

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2\,t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底かどうかを論ぜよ．ただし，t は実数である.

$\boxed{3}$ a, b は $0 < b \leq a$ を満たす実数とする．以下の漸化式により 2 つの数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定義する．

$$a_1 = a\ , \quad b_1 = b\ ,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ , \quad b_{n+1} = \frac{2}{\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}} \qquad (n = 1, 2, \dots)\ .$$

このとき，以下の問に答えよ.

(1) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $b_n \leq a_n$ が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は広義単調減少，数列 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は広義単調増加であることを示せ.

(3) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は共通の極限値に収束することを示せ.

(4) 極限値を求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の各問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．$x = au + bv,\ y = cu + dv$ (a,b,c,d は $ad - bc \neq 0$ を満たす実定数) と変数変換して u, v の関数 $g(u,v)$ を

$$g(u,v) = f(au + bv, cu + dv)$$

と定義する．このとき，$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を g の偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial u}, \dfrac{\partial g}{\partial v}$ で表せ.

(2) a, b をともに 0 でない実定数とする．$\mathbb{R}^2$ 上で定義された C^1 級関数 $f(x,y)$ が

$$b\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

を満たすならば，f は $ax + by$ のみに依る関数であることを証明せよ.

(3) 積分 $I(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha (1+x)^\beta}$ はどのような非負実数の組 (α,β) に対して収束するか．関数 $\dfrac{1}{x^\alpha(1+x)^\beta}$ $(\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$ の $x = 0, \infty$ 付近での挙動を調べることによって，そのような (α,β) の範囲を求めよ.

(4) $I(\alpha,\beta)$ を (3) で与えられた積分とする．非負実数の組 (α,β) が (3) の範囲を動くとき，等式

$$I(\alpha,\beta) = \frac{\beta}{1-\alpha} I(\alpha - 1, \beta + 1)$$

が成り立つことを示せ.

（２００４年７月３１日）　（以上）