名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００４年度前期課程入学試験問題

午後の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ V を $\mathbb{C}$ 上の $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間とし, 線形変換 $f\colon V \to V$ が条件

$$\operatorname{Ker} f \ = \ \operatorname{Im} f$$

を満たしているとする. ただし,

$$\operatorname{Ker} f \ = \ \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \quad \operatorname{Im} f \ = \ \{f(v) \mid v \in V\}$$

である. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ かつ $\operatorname{Im} f \neq V$ を示せ.

(2) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を $\operatorname{Im} f$ の基底とする. $f(w_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす V のベクトル $w_1, \ldots, w_n$ をとると, $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は 1 次独立であることを示せ.

(3) (2) における $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\}$ は V の基底であることを示せ.

(4) V の基底 $\{v_1, w_1, v_2, w_2, \ldots, v_n, w_n\}$ に関する f の行列表示を求めよ.

$\boxed{2}$ t を正の実数に値をとるパラメータとし, 関数 $f(x) = x^3 + t^4 x - t^3$ を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) x についての方程式 $f(x) = 0$ はただひとつの実数解をもつことを示せ. その解を $\alpha(t)$ とおくとき,

$$0 < \alpha(t) < t$$

かつ

$$0 < \alpha(t) < \frac{1}{t}$$

であることを示せ.

(2) $\dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ が存在することを示し, $\dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ を $\alpha(t)$ と t で表せ.

(3) $\alpha(t)$ が最大となる t と, そのときの $\alpha(t)$ の値を求めよ.

$\boxed{3}$ 複素関数

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}\ , \quad z \in \mathbb{C}$$

を考える.

(1) $R > 1$ を実数とし, 複素平面内の 2 つの線分 l_1, l_2 を

$$l_1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = t,\ 0 \le t \le R\}$$

および

$$l_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = e^{i\frac{2}{3}\pi} t,\ 0 \le t \le R\}$$

で定義し, ともにパラメータ t が増大する向きを入れるとする. このとき, f の l_1 上の線積分と l_2 上の線積分の間に次の等式が成り立つことを示せ:

$$\int_{l_2} f(z)dz = e^{i\frac{4}{3}\pi} \int_{l_1} f(z)dz\ .$$

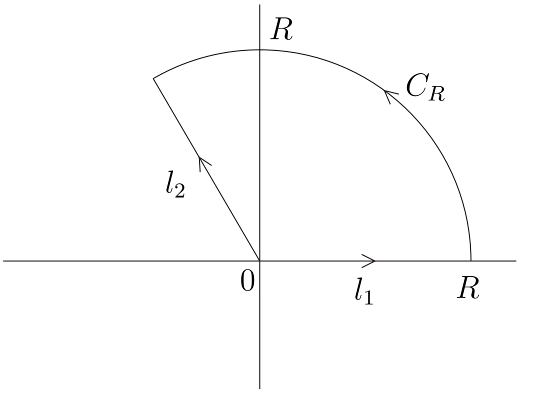
(2) 円弧 $C_R = \{z = Re^{i\theta} \,|\, 0 \le \theta \le \frac{2}{3}\pi\}$ にパラメータ θ が増大する向きを入れるとする. このとき, 次を示せ:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{C_R} f(z)dz \right| = 0\ .$$

(3) (1) と (2) を利用して定積分

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}\, dx$$

を求めよ.



$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^m$ を m 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{R}^m$ の通常の距離を d で表す. 点 $a \in \mathbb{R}^m$ と正数 r に対して

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < r\}$$

とおく. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^m$ と点 $x \in \mathbb{R}^m$ に対し, 次の 2 つの命題 (a), (b) を考える.

(a) 任意の正数 ε に対して $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

(b) 次の条件 $(*)$ を満たす A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が存在する：

$(*)$ 任意の正数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ となるすべての自然数 n に対して $a_n \in B_\varepsilon(x)$ が成り立つ.

このとき, 以下の問いに答えよ.

(1)　(b) が成り立つならば (a) が成り立つことを示せ.

(2)　(a) が成り立つならば (b) が成り立つことを示せ.

(3)　A の点列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ に対する条件 $(*)$ の否定を述べよ.

（２００３年８月２日）　（以上）