名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００４年度前期課程入学試験問題

午前の部

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^3$ の線形写像

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

を考える．また, $\mathbb{R}^3$ の部分集合 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

で定義する．このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) V は $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であることを示せ.

(2) $\phi(V) \subset V$ が成り立つことを示せ.

(3) V の基底をひと組求めよ.

(4) $\phi_V : V \to V$ を, ϕ を V に制限して得られる線形写像とする．このとき, (3) で求めた V の基底に関する ϕ_V の行列表示を求めよ.

（２００３年８月２日）　　　　（次ページあり）

2

(1) 以下の集合 W_1, W_2, W_3, W_4 が, $\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間であるかないかを答えよ. ただし, 部分ベクトル空間である場合はその理由を述べる必要はないが, 部分ベクトル空間でない場合はその理由を述べよ.

(a) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$.

(b) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \geq 0 \right\}$.

(c) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0,\ 100x + 10y + z = 0 \right\}$.

(d) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0,\ 100x + 10y + z = 1 \right\}$.

(2) 以下の写像 f_1, f_2, f_3 が, 線形写像であるかないかを答えよ. ただし, 線形写像である場合はその理由を述べる必要はないが, 線形写像でない場合はその理由を述べよ.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ z \end{pmatrix}$.

(b) $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $f_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto -x - y$.

(3) (2) の写像 f_1, f_2, f_3 の中で, 線形写像であるものすべてに対し, その像と核の基底をひと組ずつ求めよ. ただし, (2) で f_1, f_2, f_3 はすべて線形写像でないと答えた人は, この問題に解答しなくてよい.

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ. 答えだけでなく, 途中の議論も書くこと.

(1) $\mathbb{R}^2$ 内の曲線 $y = x^2$ 上の, 原点から点 $(2, 4)$ にいたる曲線を C とする. C に沿う線積分

$$\int_C xy\,dy$$

を計算せよ.

(2) $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とする. $x = u + v$, $y = uv$ と変数変換して u と v の関数 $g(u, v)$ を

$$g(u, v) = f(u + v, uv)$$

と定義する. $u \neq v$ のとき, $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ を g の偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial u}$, $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ と u, v のみを用いて表せ.

(3) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ とおく. このとき重積分

$$I = \iint_\Omega xy\,dxdy$$

を考える. 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により I を r と θ に関する積分に書き換え, I の値を求めよ.

（次ページあり）

$\boxed{4}$ 以下, a は $0 < a < 1$ を満たす定数とする.

(1) 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = a^x$ で定義し, $f(x)$ の $x = 0$ における Taylor 展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とする. このとき a_n を求め, このべき級数の収束半径を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - a^{\frac{1}{n}})$$

を求めよ.

(3) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - a^{\frac{1}{n}})$$

の収束, 発散を判定せよ.