名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００３年度前期課程入学試験問題

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ 次の行列 A によって与えられる線型写像 $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ に対して, 以下の問に答えよ.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

(1) F の核 $\mathrm{Ker}F$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(2) F の像 $\mathrm{Im}F$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(3) $\mathbb{R}^4$ の基底 (v_1,v_2,v_3,v_4) と $\mathbb{R}^3$ の基底 (w_1,w_2,w_3) で，これらに関する F の行列表示（つまり表現行列）が $\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ （E_r は r 次単位行列）の形になるものの例を一つ挙げよ.

$\boxed{2}$ 関数

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) $f(x, y)$ の臨界点を求めよ．ただし，$(x, y) = (\alpha, \beta)$ が $f(x, y)$ の臨界点であるとは $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = 0$ が成り立つこととする．

(2) $f(x, y)$ が極大，極小となる点を（もしあれば）すべて求めよ．

(3) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 6, x \geq 0, y \geq 0\}$ における $f(x, y)$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{3}$ 一般に，実数体 $\mathbb{R}$ 上の線型空間 U に対して，線型写像 $f : U \to \mathbb{R}$ 全体のなす線型空間を U^* とする．この U^* を U の双対空間と呼ぶ．

$V = M_2(\mathbb{R})$ を実数を成分とする 2 次正方行列全体のなす線型空間とし、V^* を V の双対空間とする．行列 $A \in V$ に対してその対角成分の和を対応させる線型写像を $\mathrm{tr} : V \to \mathbb{R}$ とする．$W = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ を tr の核とし，W^* を W の双対空間とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 単位行列 E_2 で張られる V の部分空間を W' とするとき，

$$V = W \oplus W'$$

と直和分解されることを示せ．

(2) V^* の元 $f : V \to \mathbb{R}$ に対して，f を W へ制限して得られる線型写像（つまり W^* の元）を $\lambda(f) : W \to \mathbb{R}$ と表す．線型写像 $\lambda : V^* \to W^*$ $(f \mapsto \lambda(f))$ が全射であることを，(1) を用いて示せ．

(3) λ の核 $\mathrm{Ker}(\lambda)$ の次元を求めよ．

(4) 任意の $f \in \mathrm{Ker}(\lambda)$ は $f = c \cdot \mathrm{tr}$ $(c \in \mathbb{R})$ と表される，つまり，

$$f(A) = c \cdot \mathrm{tr}(A) \quad (A \in V)$$

となることを示せ．

$\boxed{4}$ $X = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$ 上で定義された関数

$$f(x,t) = e^{-x^2} \cos tx$$

を考え，$g(x,t) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ とおく．このとき，各 t に対して広義積分

$$\int_0^\infty f(x,t)dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x,t)dx, \quad \int_0^\infty g(x,t)dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a g(x,t)dx$$

はともに存在することがわかっている.（これは証明しなくてよい.）t の関数 $F(t)$, $G(t)$, $G_a(t)$ $(a > 0)$ を

$$F(t) = \int_0^\infty f(x,t)dx, \quad G(t) = \int_0^\infty g(x,t)dx, \quad G_a(t) = \int_0^a g(x,t)dx$$

とおいて定める．このとき，以下の問に答えよ.

(1) $a > 0$, $0 \leq t \leq 1$ のとき，

$$|G(t) - G_a(t)| \leq \int_a^\infty xe^{-x^2} dx$$

となることを示せ.

(2) $G(t)$, $G_a(t)$ は次の性質 $(*)$ をもつことを示せ.

$(*)$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数 $R > 0$ が存在して，任意の $0 \leq t \leq 1$ と任意の $a > R$ に対して $|G(t) - G_a(t)| < \varepsilon$ となる.

(3) (2) の性質 $(*)$ を用いて，$G(t)$ が閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数であることを示せ.

(4) (2) の性質 $(*)$ を用いて，$0 \leq u \leq 1$ に対して，

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^u (G(t) - G_a(t))dt = 0$$

となることを示せ.

(5) $\displaystyle\int_0^u G(t)dt = F(u) - F(0)$ であることを示せ.