名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００３年度前期課程入学試験問題

数学発展

問題は全部で６問ある．このうち，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の３問すべてと，$\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ から選んだ１問の合計４問に解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 3 次元線型空間とし, $F : V \longrightarrow V$ を線型変換とする. U を V の 2 次元線型部分空間とし, F が次の条件 (a), (b) を満たすとする.

(a) $F(U) = \{0\}$.

(b) ある $v_1 \in V$ が存在し, $v_1 \notin U$ かつ $F(v_1) \neq 0$.

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) v_1 を条件 (b) のようにとり, $\{v_2, v_3\}$ を U の基底とするとき, $\{v_1, v_2, v_3\}$ は V の基底となることを示せ.

(2) (1) の基底に関する F の表現行列を A とするとき,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形になることを示せ.

(3) 条件 (b) の v_1 が $F(v_1) \notin U$ を満たすようにとれるとき, A は対角化可能であることを示せ.

(4) 条件 (b) の v_1 が $F(v_1) \in U$ を満たすようにとれるとき, A のジョルダン標準形を求めよ.

（２００２年７月３１日）　　（次ページあり）

$\boxed{2}$ $\mathbb{R}^N$ を N 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{R}^N$ 上の通常の距離を d で表す．点 $a \in \mathbb{R}^N$ と正数 r に対して

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^N |\ d(x, a) < r\}$$

とおき, これを a を中心とする半径 r の開球と呼ぶ．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^N$ が開集合であることの定義を開球を用いて述べよ.

写像 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ に対して次の３条件

(a) 任意の $a \in \mathbb{R}^N$ と任意の正数 ε に対して, ある正数 δ が存在して

$$f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$$

が成り立つ.

(b) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{R}^N$ に対して, U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^N$ の開集合である.

(c) 任意の $a \in \mathbb{R}^N$ と a に収束する $\mathbb{R}^N$ の任意の点列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ に対して, 点列 $\{f(a_n)\}_{n\geq 1}$ は $f(a)$ に収束する.

を考える.

(2) (a) と (b) が同値であることを示せ.

(3) (a) と (c) が同値であることを示せ.

3 n を正の整数とし, 広義積分

$$I_n = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+(x^2+y^2)^n} dxdy$$

を考える．このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により I_n を r と θ に関する積分に書き換えよ.

(2) I_n が有限の値に収束するような正の整数 n の最小値 a を求めよ.

(3), (4) では, a を (2) で求めた最小値とする.

(3) k を正の整数とするとき, 複素積分

$$\int_\Gamma \frac{z^k}{1+z^{2a}} dz$$

を計算せよ．ただし, 積分路 Γ は $\Gamma = C_R \cup [-R, R]$ (C_R は原点を中心とする半径 R の円の上半部, $R > 1$) で与えられ, 反時計回りに向きづけられているものとする.

(4) I_a を求めよ.

以下の $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ の３問から１問を選択して解答せよ.

$\boxed{4}$ 体 K 上の２変数多項式環 $K[X,Y]$ の, X^2-Y^3 によって生成されるイデアル (X^2-Y^3) による剰余環を R とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) R は整域であることを示せ.

(2) R は整閉でないことを示せ.

$\boxed{5}$ $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2+y^2+z^2=1\}$ とし, $\varphi : S^2 \to S^2$ を C^∞ 写像とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) φ の不動点集合を $F = \{p \in S^2 | \ \varphi(p) = p\}$ とする. F の任意の点 $p \in F$ において, φ の微分写像 $d\varphi_p$ が 1 を固有値にもたないならば, F は有限集合であることを示せ.

(2) $\varphi : S^2 \to S^2$ を $\varphi(x,y,z) = (x,y,-z)$ で定義するとき, S^2 上の点 $q=(x,y,0)$ における φ の微分写像 $d\varphi_q$ の固有値をすべて求めよ.

$\boxed{6}$ 半直線 $(0,\infty) = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$ 上２乗可積分な関数の全体を $L^2(0,\infty)$ とする. $x \in L^2(0,\infty)$ に対して以下の問に答えよ.

(1) x が $(0,\infty)$ 上連続微分可能であり, $\dfrac{dx}{dt} \in L^2(0,\infty)$ が成り立つとき, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ となることを示せ.

(2) x が $(0,\infty)$ 上連続であるとき $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ は成立するか? 成立するなら証明し, そうでないなら反例を挙げよ.

（２００２年７月３１日） （以上）