名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００３年度前期課程入学試験問題

数学基礎

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ a, b, c, d, p, q を実数とする. 実線型空間 $\mathbb{R}^5$ の部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & x_2 & + & (p+1)x_3 & + & 3x_4 & + & qx_5 & = a \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (2p+1)x_3 & + & 2x_4 & & & = b \\ x_1 & & & - & px_3 & + & 4x_4 & + & 4qx_5 & = c \\ & & x_2 & - & p^2x_3 & - & x_4 & - & 2qx_5 & = d \end{array} \right\}$$

が $\mathbb{R}^5$ の３次元線型部分空間になるとき, 以下の問に答えよ.

(1) a, b, c, d, p, q を求めよ.

(2) V の基底を一組求めよ.

2 実数 a に対し, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

を考える. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A の固有値を求めよ.

(2) $T^{-1}AT$ が対角行列となるような直交行列 T をひとつ求めよ.

(3) 次の $(*)$ が成り立つための必要十分条件を, a を用いて表せ.

$(*)$ 実数 x, y, z が条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 常に

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \geq -1.$$

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ. 答えだけでなく途中の議論も書くこと.

(1) a を実数とするとき, 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(e^{ax}+e^{x}).$$

(2) 次の関数 $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を求めよ.

$$h(x)=\int_0^x e^{e^{t+x}}dt.$$

(3) $f(x,y)$ を $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について C^2 級の関数とし, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ と変数変換して r と θ の関数 $g(r,\theta)$ を

$$g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)\quad(r>0)$$

と定義する. このとき, $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)$ を g の偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial r},\ \dfrac{\partial g}{\partial\theta},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta},\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2},\cdots$ と $r,\ \theta$ のみを用いて表せ.

(4) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y\geq x^2, y\leq x\}$ とするとき, 次の重積分を計算せよ.

$$\iint_D xy\ dxdy.$$

$\boxed{4}$ $y = \sin x$ $(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$ の逆関数を $g(x) = \arcsin x$ とし, $f(x) = \dfrac{1}{2} g(x)^2$ とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $g'(x)$ と $g''(x)$ を求めよ.

(2) 次の等式を示せ.

$$(1 - x^2) f''(x) - x f'(x) = 1.$$

(3) $f(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とするとき,

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = n^2 a_n \quad (n \geq 1)$$

が成り立つことを示せ. また, a_0, a_1, a_2 を求めよ.

(4) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4)}{x^6}.$$

（２００２年7月３１日）　（以上）