名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００２年度前期課程（２次募集）入学試験問題

数学専門

問題は全部で１１問である．このうちから４問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

1 複素数を成分とする 3 次正方行列全体のなす線型空間を $M_3(\mathbb{C})$ とし, 行列 $A \in M_3(\mathbb{C})$ は $A^2 = A$, $\mathrm{rank} A = 2$ をみたすとする. この行列 A に対して, 線型変換 $F : M_3(\mathbb{C}) \longrightarrow M_3(\mathbb{C})$ を

$$F(X) = AXA, \qquad X \in M_3(\mathbb{C})$$

によって定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) A のジョルダン標準形を求めよ.

(2) F の像 $\mathrm{Im}F$ の次元 $\dim(\mathrm{Im}F)$ を求めよ.

(3) $F \circ F = F$ となることに注意して, F のジョルダン標準形を求めよ.

2 $\mathbb{C}$ を複素数体, $\mathbb{C}^\times$ を 0 でない複素数全体のなす乗法群とする. $a \in \mathbb{C}^\times$, $b \in \mathbb{C}$ に対して, 写像 $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$f_{a,b}(x) = ax + b, \qquad x \in \mathbb{C}$$

によって定義し,

$$\begin{aligned} G &= \{f_{a,b} : a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathbb{C}\}, \\ H &= \{f_{1,b} \in G : b \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) G は写像の合成に関して群をなすことを示せ.

(2) H は G の正規部分群であることを示せ.

(3) 剰余群 G/H は $\mathbb{C}^\times$ と同型であることを示せ.

$\boxed{3}$ 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ で生成される複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) K を $\mathbb{Q}$ 上の線型空間と見たときの基底を１組求めよ.

(2) K の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を決定せよ.

(3) K に含まれる $\mathbb{Q}$ の２次拡大体を全て求めよ.

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ.

(1) X, Y を位相空間とする. 写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であることの定義を述べよ.

(2) 位相空間 X が連結であることの定義を述べよ.

(3) X, Y を位相空間, $f : X \longrightarrow Y$ を上への連続写像とする. もし X が連結ならば, Y も連結であることを示せ.

(4) $\mathbb{R}$ 内の閉区間 $[0, 1]$ と円周 S^1 とは同相でないことを示せ.

$\boxed{5}$ $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とし, $M \subset \mathbb{R}^3$ をそのグラフとする：

$$M = \{\,(x, y, f(x, y)) \,:\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\,\}.$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) M の点 $p = (x, y, f(x, y))$ における M の単位法ベクトル $\nu(p)$ で, 第 3 成分が正であるものを求めよ.

各 $p \in M$ に $\nu(p)$ を対応させることにより, ν を M から単位球面

$$S^2 = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,\}$$

への写像とみる. $q \in M$ を $\nu(q) = (0, 0, 1)$ となる M の点とし, $d\nu_q : T_qM \longrightarrow T_{\nu(q)}S^2$ を ν の q における微分写像とする.

(2) $d\nu_q$ を $T_qM, T_{\nu(q)}S^2$ の共通の正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ ($e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$) に関して行列表示し, その行列式 $\det(d\nu_q)$ を求めよ.

(3) $f(x, y) = x^2 + ay^2$ (a は定数) の場合に, $\det(d\nu_q)$ を計算せよ.

(4) f が一般の場合に, $\det(d\nu_q) \neq 0$ なる点 $q \in M$ の近傍における M の形状と $\det(d\nu_q)$ の符号の関係を説明せよ.

6 xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次微分形式 $\omega = dx \wedge dy$ を考える. また, $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級関数 H に対し, $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X_H を

$\mathbb{R}^2$ 上のすべてのベクトル場 Y に対して $\omega(X_H, Y) = (dH)(Y)$ が成り立つ

という条件により定める. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 関数 H の X_H による微分を計算せよ.

以下, $H(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$ とする.

(2) ベクトル場 X_H の $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ を始点とする積分曲線 $c_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を求めよ.

(3) c_p を (2) で定まった積分曲線とし, $t \in \mathbb{R}$ を固定する. $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(p) = c_p(t), \qquad p \in \mathbb{R}^2$$

によって定義される微分同相写像とする. このとき, $\varphi^*\omega = \omega$ を示せ.

$\boxed{7}$ 以下の問に答えよ．ただし，積分路は反時計回りに向きづけられているものとする．

(1) 複素関数 $f(z) = (z-1)^3(z+3)$ に対して

$$\text{(i)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz, \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

をそれぞれ計算せよ．

(2) 一般に $f(z)$ を円周 $\{z : |z| = r\}$ $(r > 0)$ 上に零点を持たない多項式とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

の値は何を意味しているか，述べよ．

(3) 再び $f(z) = (z-1)^3(z+3)$ とおく．円周 $\{z : |z| = 1\}$ から弧 $\{z = e^{i\theta} : |\theta| < \varepsilon\}$ を除いた曲線を C_ε $(0 < \varepsilon < \pi)$ とするとき，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

を計算せよ．

8 $\mathcal{H}$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を備えた実ヒルベルト空間とし, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in \mathcal{H})$ とおく. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の元の列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $x \in \mathcal{H}$ に弱収束するとは,

$$\lim_{n\to\infty} \langle\, x_n - x\,,\, y\,\rangle = 0$$

が任意の $\mathcal{H}$ の元 y に対して成り立つことである. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\{x_n\}$ が x に弱収束するとき,

$$\lim_{n\to\infty} (\|x_n\|^2 - \|x_n - x\|^2 - \|x\|^2) = 0$$

を示せ.

(2) $\{x_n\}$ が x に弱収束し, さらに $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ が成り立っているとき,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

を示せ.

(3) l^2 を $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ を満足する実数列 (a_j) の全体とする. l^2 は

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j, \quad x = (a_j),\, y = (b_j) \in l^2$$

を内積として実ヒルベルト空間となることが知られている. l^2 の元の列 $\{x_n\}$ で 0 (ゼロ数列) に弱収束するが, $\|x_n\|$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束しないような例を挙げよ.

$\boxed{9}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上有界な連続関数とし, 関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ を次で定義する：

$$u_n(x) = \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|x-t|} f(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) u_n は次の微分方程式の $\mathbb{R}$ 上有界な解であることを証明せよ.

$$(*) \qquad \frac{1}{n^2}\frac{d^2u}{dx^2} - u + f = 0.$$

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めよ. また, $(*)$ の $\mathbb{R}$ 上有界な解は u_n に限ることを証明せよ.

(3) 関数列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき, $\mathbb{R}$ 上で f に広義一様収束することを証明せよ.

$\boxed{10}$ $P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3)$ に対し, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = P(x(t))$$

の解 $x(t)$ で, $x(0) = x_0$ なるものを考える. ただし, $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$, または $\alpha_2 < x_0 < \alpha_3$ であるとする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) ある有限な時刻 t_0 において, $\lim_{t \to t_0} x(t)$ は α_1, α_2, α_3 のいずれにもならないことを示せ.

(2) 解 $x(t)$ は $\mathbb{R}$ 上全体で定義されることを示せ.

(3) 極限値 $\lim_{t \to -\infty} x(t)$ と $\lim_{t \to \infty} x(t)$ を求めよ.

11 平面 $\mathbb{R}^2$ を部分集合 $I_n = \mathbb{R} \times [n, n+1)$ $(n \in \mathbb{Z})$ によって

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n \quad (\text{ただし } I_m \cap I_n = \emptyset\ (m \neq n))$$

と分割する．ここで $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合である．$\{I_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を含む最小の σ-加法族を $\mathcal{F}_1$ とする．ここで, 集合 X の部分集合族 $\mathcal{F}$ が σ-加法族であるとは, 次の 3 条件を満足することである：

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$ （ただし, A^c は A の X における補集合を表す),

(iii) $\{A_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

このとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 B に対し, 次が同値であることを示せ.

(a) $B \in \mathcal{F}_1$.

(b) $\mathbb{Z}$ のある部分集合 S があって, $B = \displaystyle\bigcup_{n \in S} I_n$ と表される.

(2) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{F}_1)$ を一つの可測空間とみたとき, $\mathbb{R}^2$ 上の可測関数はどのような関数であるか, なるべく具体的に述べよ.

(3) $\widetilde{I}_k = [k, k+1) \times \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z})$ とおき, $\left\{\widetilde{I}_k\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ を含む最小の σ-加法族を $\mathcal{F}_2$ とする．また, $J_{ik} = [i, i+1) \times [k, k+1)$ $(i, k \in \mathbb{Z})$ とおき, $\{J_{ik}\}_{i,k \in \mathbb{Z}}$ を含む最小の σ-加法族を $\mathcal{G}$ とする．このとき, $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ を含む最小の σ-加法族であることを示せ.