名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００２年度前期課程（２次募集）入学試験問題

数学基礎

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ $a,\ b,\ c$ を定数として次の連立１次方程式を考える.

$$(*)\begin{cases} 2x_1 & & + 4x_3 & + 2x_4 & = b+c \\ x_1 & - x_2 & + 3x_3 & + 2x_4 & = b \\ 2x_1 & + x_2 & + 3x_3 & + x_4 & = c \\ (a-2)x_1 & - 2x_2 & & + ax_4 & = 2b \end{cases}$$

(1) $b=c=0$ のとき, $(*)$ の解全体のなす線型空間の次元と１組の基底を求めよ.

(2) $(*)$ が解をもつための必要十分条件を, b と c を用いて表せ. また, そのときの解を全て求めよ.

$\boxed{2}$ ３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ において, 原点を通りベクトル $a = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面を H とする. 各点 $x \in \mathbb{R}^3$ に対して, H に関して x と対称な点を対応させる写像を $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) F は線型写像であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ で, 特に $v_1 = a$ となるものを１組求めよ.

(3) (2) で求めた基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ に関する F の表現行列 (つまり, 行列表示) を求めよ.

$\boxed{3}$ 半径 1, 中心角 θ $(0 < \theta < \pi)$ の扇形 OAB において, 弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さを $f(\theta)$, 弦 AB の長さを $g(\theta)$ とする．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) $g(\theta)$ は

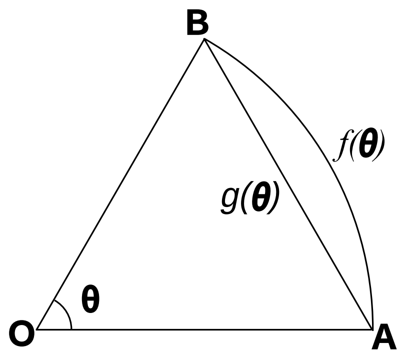
$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \theta^n$$

と θ のべき級数に展開できる．このとき, 係数 a_n を求めよ．

(2) $\theta \to 0$ のとき

$$\frac{f(\theta) - g(\theta)}{g(\theta)^{\alpha}}$$

が 0 でない有限の値に収束するような実数 α の値を求めよ．また, そのときの極限値を求めよ．



$\boxed{4}$ 関数

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2,\quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

に対して, 以下の問に答えよ.

(1) $f(x,y)$ の臨界点を求めよ. ただし, $(x,y) = (\alpha,\beta)$ が $f(x,y)$ の臨界点であるとは, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha,\beta) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(\alpha,\beta) = 0$ が成り立つことであるとする.

(2) a を実数の定数とし, 関数 $g(x) = f(x,ax)$ を考える. $g(x)$ が $x = 0$ において極大, あるいは極小, あるいはそのどちらでもないかを, a の値に応じて判定せよ.

(3) $f(x,y)$ が極大となる点, 極小となる点を (もし存在するならば) 全て求めよ.

（２００２年１月１２日）　（以上）