名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００２年度前期課程入学試験問題

数学基礎（昼夜開講コース）

問題は全部で４問である．このうちから３問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ 次の行列 A によって与えられる線型写像 $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) T の像 $\mathrm{Im}(T)$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

(2) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ の次元と 1 組の基底を求めよ.

（２００１年８月１日）

（次ページあり）

$\boxed{2}$ $a \geq 0$ とし, 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) $a = 4$ のとき, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P をひとつ求めよ.

(2) A が対角化可能でないような a の値を全て求めよ.

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ．

(1) 関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad (x > -1)$$

の $x = 0$ におけるテイラー展開を求めよ．ただし収束性について議論する必要はない．

(2) 関数

$$g(x) = \log \frac{1+\sqrt{1+x}}{2} \qquad (x > -1)$$

の $x = 0$ におけるテイラー展開が次の級数で与えられることを示せ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{2n \cdot (2n)!!} x^n$$

また，この級数の収束半径を求めよ．ただし

$$(2n)!! = (2n)(2n-2) \cdots 4 \cdot 2,$$
$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1$$

である．

$\boxed{4}$ λ を実定数とする. $0 < \varepsilon < 1$ に対し

$$D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

とおくとき, 次の広義積分が収束するかどうかを判定せよ. また収束するときは, 広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{1}{(x^2 + y^2)^{\lambda/2}} dxdy$

(2) $\displaystyle \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\log \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{\lambda/2}} dxdy$