名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００２年度前期課程入学試験問題

数学専門

問題は全部で１４問である．このうちから４問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 4 次元線型空間とし, $F : V \longrightarrow V$ を線型変換とする. F の階数 $(\mathrm{rank}\, F)$ が 1 であるとき, 以下の問に答えよ.

(1) V の基底を適当にとれば，それに関する F の表現行列は

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形になることを示せ.

(2) F のジョルダン標準形を求めよ.

$\boxed{2}$ 実数を成分とする 3 次正則行列全体のなす群を G とし, G に含まれる上三角行列全体のなす部分集合を H とする. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) H は G の部分群であることを示せ.

(2) G に含まれる対角行列全体のなす部分群を K とする. H の正規部分群 N で, 剰余群 H/N が K と同型となるものを 1 つ求めよ. また, その N に対して, H/N が K と同型であることを示せ.

$\boxed{3}$ 体 K 上の 1 変数多項式環を $R = K[X]$ とし, $X^3 - 2$ によって生成される R のイデアルを I とする. 剰余環 $\overline{R} = R/I$ について, 以下の問に答えよ.

(1) K 上の線型空間としての $\overline{R}$ の基底を 1 組求めよ. また, それが基底であることを示せ.

(2) K が有理数体 $\mathbb{Q}$ であるとき, $\overline{R}$ は体であることを示せ.

(3) K が実数体 $\mathbb{R}$ であるとき, $\overline{R}$ は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{C}$ の直積環 $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ と環として同型であることを示せ. ただし, $\mathbb{C}$ は複素数体である.

$\boxed{4}$ 多項式 $X^4 - X^2 + 1$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{Q}$ 上の線型空間としての K の基底を 1 組求めよ.

(2) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の構造を決定せよ.

(3) $K/\mathbb{Q}$ の中間体をすべて求めよ.

$\boxed{5}$ 以下の問に答えよ.

(1) 位相空間 X がコンパクトであることの定義を, 開被覆を用いて述べよ.

(2) 実直線 $\mathbb{R}$ (通常の位相を入れたもの) の次の部分集合を考える.

(a) 閉区間 $[0,1]$
(b) 半開区間 $[0,1)$

これらの部分集合がコンパクトか否かを答えよ. また, コンパクトである場合にはその理由を簡潔に述べよ. 一方, コンパクトでない場合には, その理由を (1) で与えた定義に基づいて説明せよ.

(3) 位相空間 X から位相空間 Y への写像 $f : X \longrightarrow Y$ が連続であることの定義を述べよ.

(4) (1) および (3) で与えた定義に基づいて, 次の事実を証明せよ.
X, Y を位相空間, $f : X \longrightarrow Y$ を全射な連続写像とする. もし X がコンパクトならば, Y もコンパクトである.

$\boxed{6}$ 実数 a に対し, 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

$$S_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ f_a(x,y,z) = 3a+3\}$$

を考える. ただし

$$\begin{aligned} f_a(x,y,z) &= (\,x\ \ y\ \ z\,) \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= (a+1)(x^2+y^2+z^2) + 2a(xy+yz+zx) \end{aligned}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(1) 行列 $\begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$ の固有値を求めよ.

(2) 3 次直交行列 P で, 次の条件 $(*)$ をみたすものをひとつ求めよ.

$(*)$ 座標変換 $(\,X\ Y\ Z\,) = (\,x\ y\ z\,)P$ によって, 曲面 S_a の方程式が

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 3a+3$$

$(A, B, C$ は実定数$)$ という形となる.

(3) 曲面 S_a が連結であるための必要十分条件を, a を用いて表せ.

(4) 曲面 S_a がコンパクトであるための必要十分条件を, a を用いて表せ.

$\boxed{7}$ 以下の問に答えよ.

(1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の C^∞ 級曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ $(0 < s < 1)$ に対し, その曲率 $\kappa(s)$ の定義を述べよ. ただし, s は弧長パラメータ, すなわち, すべての s に対してベクトル $\gamma'(s) = \left(\dfrac{dx}{ds}(s), \dfrac{dy}{ds}(s)\right)$ の長さが 1 であるようなパラメータとする.

(2) 曲線

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}s^2,\ \frac{1}{2}s\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} s\right) \quad (0 < s < 1)$$

の曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

で与えられることを確かめよ. ただし $\operatorname{Arcsin} s$ は $\sin t$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数とする.

(3) $\gamma(s)$ $(0 < s < 1)$ を, 弧長 s でパラメータ付けられた平面 $\mathbb{R}^2$ 内の C^∞ 級曲線とする. もし $\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ が s に依らず一定ならば, 曲線 $\gamma(s)$ は円の一部または直線の一部であることを証明せよ.

$\boxed{8}$ xy-平面 $\mathbb{R}^2$ 上の微分形式

$$\lambda = x\,dy, \qquad \omega = dx \wedge dy$$

を考える．一方,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

を全単射な C^∞ 級写像とし, ω を保つ, すなわち $\varphi^*\omega = \omega$ をみたすものとする．このとき, 以下の問に答えよ．

(1) 点 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ における φ のヤコビ行列を $J = J(x,y)$ で表す．すなわち

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

である．このとき, ${}^tJ\Omega J$ を計算せよ．ただし, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とし, ${}^tJ$ は J の転置行列を表す．

(2) $\eta = \lambda - \varphi^*\lambda$ に対し, $d\eta = 0$ を示せ．ただし, $d\eta$ は η の外微分である．

(3) D を $\mathbb{R}^2$ 内の領域とし, その境界 $c = \partial D$ は C^∞ 級の単純閉曲線であるとする．このとき,

$$\int_c \lambda = \int_{\varphi(c)} \lambda$$

が成り立つことを示せ．ただし, c には反時計回りに向きが与えられているものとし, $\varphi(c)$ には c の向きから φ によって誘導された向きがついているものとする．

$\boxed{9}$ 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{z}e^{\frac{1}{z}} \qquad (z \neq 0)$$

を考える.

(1) f の $0 < |z| < \infty$ におけるローラン展開を求めよ. また, 原点と無限遠点はそれぞれどのような種類の特異点であるかを答えよ.

(2) 線積分

$$\int_{|z|=1} f(z)\ dz$$

を求めよ. ただし積分路は反時計回りに向きづけられているものとする.

(3) (2) を利用して定積分

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta$$

を求めよ.

10 実直線 $\mathbb{R}$ 上の関数 f_n $(n = 1, 2, \cdots)$ と f はルベーグ可積分であり, 以下では常に,

f_n は $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたるところ f に収束している

と仮定する. このとき, 以下の問に答えよ. ただし, $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数 g に対して,

$$\|g\| = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx$$

とおく.

(1) 次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Big| |f_n(x)| - |f_n(x) - f(x)| - |f(x)| \Big|\, dx = 0$$

(2) さらに $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|$ が成り立つとき, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ を示せ.

(3) $\|f_n\|$ が $\|f\|$ に収束しないとき, $\|f_n - f\|$ が 0 に収束しないような f_n と f の例を挙げよ.

11 閉区間 $[0,1]$ 上定義された連続関数全体のなす集合を X とし, $f \in X$ に対してそのノルム $\|f\|_1, \|f\|_2$ を

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx, \qquad \|f\|_2 = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

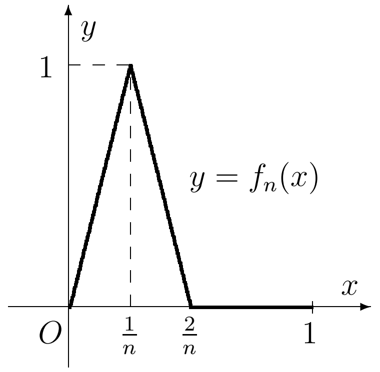
によって定義する．また,

$$Y = \{\, g \in X \ :\ |g(x) - g(y)| \le |x-y| \ (x, y \in [0,1])\}$$

とおく.

(1) X の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を,

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right), \\ -n\left(x - \dfrac{1}{n}\right) + 1, & x \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right), \\ 0, & x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$



によって定める．このとき, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 \ne 0$ を示せ.

(2) $g \in Y$ とする．$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ に対して, $\|g\|_2 > \varepsilon$ ならば $\|g\|_1 > \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ となることを示せ.

(3) Y の関数列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_1 = 0$ ならば, $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_2 = 0$ となることを示せ.

12 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

の解 $(\,x(t)\,,y(t)\,,z(t)\,)$ $(t \in \mathbb{R})$ について, 以下の問に答えよ. ただし, a, b, c は $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実定数とする.

(1) $p(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とするとき,

$$\|\,p(t)\,\|^2, \quad \langle \Omega,\, p(t)\,\rangle, \quad \left\| \frac{dp(t)}{dt} \right\|^2$$

はいずれも t に依らないことを示せ. ここで, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$ に対し $\langle p,\, q\,\rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$, $\|\,p\,\|^2 = \langle p,\, p\,\rangle$ である.

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 $p(t)$ の運動 (t を時間変数とみなす) を詳しく記述せよ.

13 実数 t の関数 $q(t)$ に対する２階常微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d^2q}{dt^2}(t) = -\frac{dV}{dq}(q(t))$$

および, 実数 t の関数の組 $(q(t), p(t))$ に対する常微分方程式系

$$(**) \qquad \begin{cases} \dfrac{dq}{dt}(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)), \\ \dfrac{dp}{dt}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \end{cases}$$

を考える. ただし, $V(q)$ は $q \in \mathbb{R}$ の C^∞ 級関数であり, $H(q,p)$ は $(q,p) \in \mathbb{R}^2$ の C^∞ 級関数である. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) 方程式系 $(**)$ の解 $(q(t), p(t))$ に対し, $H(q(t), p(t))$ は t に依らないことを示せ.

(2) $q(t)$ を方程式 $(*)$ の解とするとき,

$$p(t) = \frac{dq}{dt}(t), \qquad H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$$

とおけば, $(q(t), p(t))$ は $(**)$ の解であることを示せ.

以降, とくに

$$V(q) = -\frac{1}{4}(q^4 - 2q^2), \qquad q \in \mathbb{R},$$

とする.

(3) 関数

$$H(q,p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}(q^4 - 2q^2)$$

の臨界点 $\left(\text{すなわち}, \dfrac{\partial H}{\partial q}(q,p) = \dfrac{\partial H}{\partial p}(q,p) = 0 \text{ なる点 } (q,p)\right)$ をすべて求めよ. また, 各臨界点の十分小さな近傍での $H(q,p)$ の等高線の様子を図示せよ.

(4) 初期条件 $(q(0), \dfrac{dq}{dt}(0)) = (a,b)$ の下での方程式 $(*)$ の解 $q(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ が周期解であるような (a,b) の範囲を求め, それを図示せよ. また, なぜそのような結果が得られたか, 簡潔に説明せよ.

$\boxed{14}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数列 X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ は独立同分布であり, X_1 の分布は

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{2}{3}, \qquad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{3}$$

で与えられているものとする. $n = 1, 2, \ldots$ に対して確率変数 Y_n を

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\Big)$$

によって定義する. このとき, 以下の問に答えよ.

(1) Y_n の分布は $n \to \infty$ のとき, どのようなものに収束するか, 答えのみを記せ.

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > 0)$ を求めよ.

(3) a を実数とし, e^{iaY_n} の期待値を $\mathbb{E}\left[e^{iaY_n}\right]$ と表す. 極限 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{iaY_n}\right]$ を求めよ.