名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題（２次募集）

数学専門（昼夜開講コース）

問題は全部で８問である．このうちから３問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ を実数体とし, 実数を成分に持つ 2 次正方行列全体を $M_2(\mathbb{R})$ とする.

(1) 以下の行列の最小多項式を求めよ. ただし, a, b, c, d, e は実数とする.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} \ (e \neq 0).$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2+t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ただし, t は実数) に対して, $P^{-1}AP$ が (1) の (i), (ii), (iii) のいずれかの形の行列となるような正則行列 $P \in M_2(\mathbb{R})$ を 1 つ求め, そのときの $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(3) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $Q^{-1}BQ$ が (1) の (i), (ii), (iii) のいずれかの形の行列となるような正則行列 $Q \in M_2(\mathbb{R})$ を 1 つ求め, そのときの $Q^{-1}BQ$ を計算せよ.

$\boxed{2}$ 整数全体のなす環を $\mathbb{Z}$ とし, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ を 7 を法とする剰余類のなす環とする.

(1) 各々の $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (ただし, $a \neq \overline{0}$) に対して, $ab = \overline{1}$ となる $b \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を求めよ.

(2) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ から $\overline{0}$ を除いて得られる集合を $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$ とする.

$$G = \left\{\overline{1}, a, a^2, a^3, a^4, a^5\right\}$$

となる $a \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を 1 つ求めよ.

(3) $GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ を, $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の元を成分とする 2 次正方行列で, 行列式が $\overline{0}$ でないもの全体のなす群とする：

$$GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,:\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\ ad - bc \neq \overline{0}\right\}.$$

この群 $GL_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ の位数 (すなわち, 含まれる元の個数) を求めよ.

3 $\mathbb{R}$ を実数体とする. 以下の (1) から (4) の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ の直積 $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ は整域かどうか, 簡潔な理由と共に答えよ.

(2) $B = \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ を, $\mathbb{R}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ のイデアル (x^2+1) による剰余環とする. この環 B は整域であることを示せ. また, B は体かどうか, 簡潔な理由と共に答えよ.

整域 R は, その任意のイデアルが 1 つの元で生成されるとき, 単項イデアル整域 (PID) と呼ばれる.

(3) 単項イデアル整域の例を 2 つ挙げよ (理由等を述べる必要はない).

(4) $\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環 $C = \mathbb{R}[x, y]$ は単項イデアル整域でないことを示せ.

$\boxed{4}$ 以下の (a) から (e) までの各々の主張に対し，それが正しいかどうかを判定せよ．また正しくない主張に対しては反例を挙げよ．ただし，正しい主張に対してはその理由等を述べる必要はない．

(a) 直線 $\mathbb{R}$ の開集合 U_λ からなる集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，その共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ もまた $\mathbb{R}$ の開集合である．

(b) 直線 $\mathbb{R}$ の閉集合 F_λ からなる集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，その共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ もまた $\mathbb{R}$ の閉集合である．

(c) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の集合 $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \le 1\}$ 上の任意の実数値連続関数は最大値を持つ．

(d) 平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合 U の，連続写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ による像 $f(U)$ もまた $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

(e) 平面 $\mathbb{R}^2$ の空でない閉集合 F, G が $F\cap G = \phi$ をみたすならば，

$$\inf_{x\in F,\, y\in G} \|x-y\| > 0$$

である．ただし，$x = (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ に対し，$\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ とする．

$\boxed{5}$ 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$$

とその中の曲線

$$C = \left\{(x, y, z) \in S : z = 0\right\}$$

を考える. S 上の点 $P = (a, b, c)$ において S に接する平面を H_P とする.

(1) 平面 H_P の方程式を求めよ.

(2) 点 P が C 上にあるとき, $H_P \cap S$ は 2 直線の和集合であることを示せ.

(3) 次式を示せ：

$$S = \bigcup_{P \in C} \left(H_P \cap S\right).$$

$\boxed{6}$ 複素数 z の関数

$$f(z) = \frac{36}{(z^2-1)(z^2+z-2)}$$

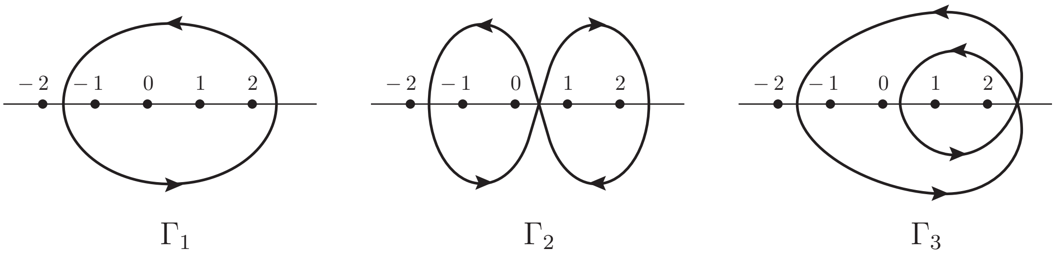
を考える.

(1) $f(z)$ のすべての極およびそれらの極での留数を求めよ.

(2) $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ を下図のような向き付けられた連続曲線とするとき, 積分

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz, \quad \int_{\Gamma_2} f(z)dz, \quad \int_{\Gamma_3} f(z)dz$$

を計算せよ.



$\boxed{7}$ $x = x(t)$, $y = y(t)$ に関する常微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正則行列 P を 1 つ求め, そのときの $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(2) 微分方程式 $(*)$ を初期条件 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の下で解け.

(3) 任意の初期条件 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (ただし, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$) から出発した $(*)$ の解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\{x(t)^2 + y(t)^2\}$$

を求めよ.

$\boxed{8}$ 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値確率変数列 X_k $(k = 1, 2, \cdots)$ は独立同分布であり, その分布は

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

に従うものとする. 自然数 n に対して $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく.

(1) W_n の期待値 $\mathbb{E}[W_n]$ を求めよ.

(2) $(W_n)^2$ の期待値 $\mathbb{E}[(W_n)^2]$ を求めよ.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[(W_n)^4]$ を求めよ.