名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題（２次募集）

数学基礎（昼夜開講コース）

問題は全部で４問である．このうちから３問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ とその上の内積

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

を考える. $v = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし, v に直交するベクトル全体のなす $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を W とする.

(1) W の基底を１組求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ で, 特に $v_1 = v$ となるものを１組求めよ.

(3) ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

$$a = \lambda v + x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ x \in W$$

の形に表せ.

（２００１年1月１３日）　　　　（次ページあり）

$\boxed{2}$ 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ の１組の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のようにとる．また, 3 次実正方行列 A に対して, A の定める $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換を $F_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ と表す. (すなわち, $F_A(v) = Av$ である．) 以降 A を, 条件

$$F_A(v_1) = v_3, \qquad F_A(v_2) = 0, \qquad F_A(v_3) = 0$$

をすべてみたす 3 次実正方行列とする.

(1) A を求めよ.

(2) F_A の像 $\mathrm{Im}\,(F_A)$ および核 $\mathrm{Ker}\,(F_A)$ それぞれの次元を求めよ.

(3) 3 次実正方行列 B で, 条件

$$\mathrm{Im}\,(F_B) = \mathrm{Im}\,(F_A), \qquad \mathrm{Ker}\,(F_B) = \mathrm{Ker}\,(F_A)$$

を共にみたすものは, A のスカラー倍 αA (ただし, α は 0 でない実数) に限ることを示せ.

$\boxed{3}$ 次式によって実数全体で定義された関数 $f(x)$ を考える：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ において連続であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ において微分可能であることを示し, $x = 0$ における微分係数を求めよ.

(3) 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ において連続かどうか, 理由と共に答えよ.

$\boxed{4}$ 以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ は, $x > 0$ で定義された実数値連続関数で, 以下の条件をみたすものとする：

(i) すべての $x > 0$ に対し, $f(x) > 0$,

(ii) $f(x)$ は単調減少, すなわち, $x \leq y$ ならば $f(x) \geq f(y)$.

自然数 $n = 1, 2, \cdots$ に対して,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

とおく.

(a) $a_n \geq 0$ を示せ.

(b) 数列 $\{a_n\}$ は単調減少 (すなわち, $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$) であることを示せ.

(2) 極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

が存在することを示せ.