名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題（２次募集）

数学専門

問題は全部で１２問である．このうちから４問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ を実数体とし, 実数を成分に持つ 2 次正方行列全体を $M_2(\mathbb{R})$ とする.

(1) 以下の行列の最小多項式を求めよ. ただし, a, b, c, d, e は実数とする.

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \text{(iii)} \begin{pmatrix} d & -e \\ e & d \end{pmatrix} (e \neq 0).$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2+t & -t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ただし, t は実数) に対して, $P^{-1}AP$ が (1) の (i), (ii), (iii) のいずれかの形の行列となるような正則行列 $P \in M_2(\mathbb{R})$ を 1 つ求め, そのときの $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(3) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $Q^{-1}BQ$ が (1) の (i), (ii), (iii) のいずれかの形の行列となるような正則行列 $Q \in M_2(\mathbb{R})$ を 1 つ求め, そのときの $Q^{-1}BQ$ を計算せよ.

$\boxed{2}$ 整数全体のなす環を $\mathbb{Z}$ とし, 正の整数 n に対して, n を法とする剰余類全体のなす環を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と表す. p を素数とし,

$$SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) : \det A = 1\},$$
$$SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

をそれぞれ, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ の元を成分とする 2 次正方行列で, 行列式が 1 であるもの全体のなす群とする.

(1) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ および $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ の可逆元 (すなわち, 逆元を持つ元) の個数をそれぞれ求めよ（答えのみでよい).

(2) 群 $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ の位数を求めよ.

(3) $\pi : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を自然な環準同型写像とし, $\varphi : SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ を

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$$

で定まる群準同型写像とする. このとき, 核 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ の位数を求めよ.

3 $\mathbb{R}$ を実数体とし,

$A = \mathbb{R}[x, y]$ 　($\mathbb{R}$ 上の 2 変数多項式環),

$B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 　($\mathbb{R}$ の直積),

$C = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$
(1 変数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ のイデアル $(x^2 + 1)$ による剰余環),

$D = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + 1)$
(2 変数多項式環 $\mathbb{R}[x, y]$ のイデアル $(x^2 + 1)$ による剰余環)

の 4 つの可換環を考える.

(1) A, B, C, D それぞれの環は整域かどうか, 簡潔な理由と共に答えよ.

(2) A, B, C, D それぞれの環は体かどうか, 簡潔な理由と共に答えよ.

(3) A, B, C, D それぞれの環は単項イデアル整域 (PID) かどうか, 簡潔な理由と共に答えよ. (ただし, 整域 R は, その任意のイデアルが 1 つの元で生成されるとき, 単項イデアル整域であると呼ばれる.)

$\boxed{4}$ $\alpha^3 = \sqrt{-3}$ をみたす複素数 α を 1 つとり, $\mathbb{Q}(\alpha)$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 α によって生成された複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とする.

(1) $\mathbb{Q}(\alpha)$ の $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 (すなわち, $\mathbb{Q}$ 上の線形空間と見たときの次元) を求めよ.

(2) 拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示し, そのガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ を決定せよ.

(3) 拡大 $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体 K で, $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数が 3 であるものの個数を求めよ.

$\boxed{5}$ 以下の (a) から (f) までの各々の主張に対し，それが正しいかどうかを判定せよ．また正しくない主張に対しては反例を挙げよ．ただし，正しい主張に対してはその理由等を述べる必要はない．

(a) 直線 $\mathbb{R}$ の開集合 U_λ からなる集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，その共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ もまた $\mathbb{R}$ の開集合である．

(b) 直線 $\mathbb{R}$ の閉集合 F_λ からなる集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，その共通部分 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ もまた $\mathbb{R}$ の閉集合である．

(c) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の集合 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の任意の実数値連続関数は最大値を持つ．

(d) 平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合 U の，連続写像 $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ による像 $f(U)$ もまた $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

(e) 平面 $\mathbb{R}^2$ の空でない閉集合 F, G が $F \cap G = \phi$ をみたすならば，

$$\inf_{x\in F,\, y\in G} \|x - y\| > 0$$

である．ただし，$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする．

(f) 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ のコンパクトな部分集合は，平面 $\mathbb{R}^2$ と同相な部分集合を含まない．

6 xy-平面 $\mathbb{R}^2$ から原点 O と点 $A = (0, 2)$ を除いて得られる開集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O, A\}$ を考える．その上の 1 次微分形式 (1-形式) α を,

$$\alpha = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}$$

によって定義する．

(1) α が閉形式 (すなわち, その外微分 $d\alpha$ がいたる所ゼロ) であることを示せ．

(2) C を原点 O を中心とする半径 1 の円とする．ただし, C には反時計回りに向きが入っているものとする．このとき, C 上における α の積分

$$\int_C \alpha$$

を計算せよ．

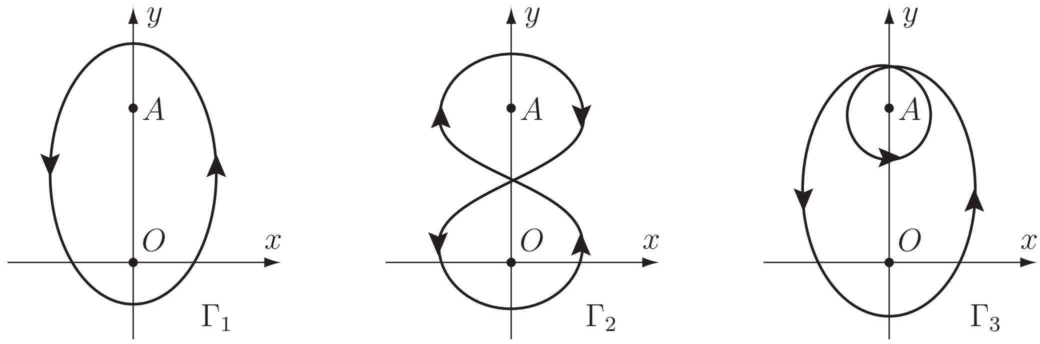
(3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{O, A\}$ 上の 1 次微分形式 ω を,

$$\omega = \alpha + \sqrt{2}\beta, \qquad \text{ただし} \qquad \beta = \frac{-(y-2)dx + x\,dy}{x^2 + (y-2)^2}$$

によって定義する．また, Γ_1, Γ_2, Γ_3 を下図のような向き付けられた C^1 級曲線とする．このとき ω の積分

$$\int_{\Gamma_1} \omega, \qquad \int_{\Gamma_2} \omega, \qquad \int_{\Gamma_3} \omega$$

を求めよ．



$\boxed{7}$ M を 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の C^∞ 級曲面とする．点 $p \in M$ における M の接平面を T_pM で表す．$\mathbb{R}^3$ 内の C^2 級曲線 $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (ただし, I は $\mathbb{R}$ 内の区間とする) が以下の 2 つの条件をみたすとき, γ を M の測地線と呼ぶ：

(i) すべての $t \in I$ に対し, $\gamma(t) \in M$;

(ii) すべての $t \in I$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ に対し, $\langle \gamma''(t), X \rangle = 0$.

ただし, $\gamma''(t) \in \mathbb{R}^3$ は時刻 t における γ の加速度ベクトルを表す．また $\langle \gamma''(t), X \rangle$ は $\gamma''(t)$ と X の $\mathbb{R}^3$ における標準内積を表す.

以降,

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = f(z)^2,\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

を C^∞ 関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ が定める回転面とする.

(1) 点 $p = (f(z)\cos\theta,\ f(z)\sin\theta,\ z) \in M$ (ただし, $z, \theta \in \mathbb{R}$) における接平面 T_pM の基底を 1 組求めよ.

(2) 曲線 $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\gamma(t) = (f(z_0)\cos t,\ f(z_0)\sin t,\ z_0) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義する．ただし, $z_0 \in \mathbb{R}$ は定数である．この曲線が M の測地線であることと, 関数 f の z_0 における微分係数がゼロであることが同値であることを示せ.

(3) 曲線 $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$\beta(t) = (f(t)\cos\theta_0,\ f(t)\sin\theta_0,\ t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

によって定義する．ただし $\theta_0 \in \mathbb{R}$ は定数である．さらに β を弧長によりパラメータ付けしなおして得られる曲線を α とする．このとき α が M の測地線であることを示せ.

$\boxed{8}$ 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内に 3 次元球面 S と超平面 H を以下のようにとる：

$$S = \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x^2+y^2+z^2+w^2 = 1\Big\},$$
$$H = \Big\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, w = 0\Big\}.$$

S 内に点 $A = (0,0,0,1)$ をとる．点 $P = (x,y,z,0) \in H$ に対し, 2 点 A, P を通る $\mathbb{R}^4$ 内の直線と S との 2 つの交点のうち, A 以外のものを $F(P)$ とすることによって, 写像 $F : H \longrightarrow S$ を定義する.

(1) 写像 F による点 $P = (x,y,z,0) \in H$ の像 $F(P)$ を x, y, z を用いて表せ.

(2) S の部分集合 T および H の部分集合 K を以下のようにとる：

$$T = \Big\{(x,y,z,w) \in S \,:\, x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}\Big\},$$
$$K = \Big\{(x,y,z,0) \in H \,:\, \Big(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{2}\Big)^2 + z^2 \leq 1\Big\}.$$

このとき, $F(K) = T$ であることを示せ.

(3) (2) で定義した T と K は互いに同相であることを示せ.

(4) 超平面 H を自然な仕方で 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視することにより, (2) で定義した K を $\mathbb{R}^3$ の部分集合として図示せよ.

$\boxed{9}$ 実直線 $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数全体のなす集合を X とする. X 上の距離 d を

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|, \qquad f,g \in X$$

によって定義する.

(1) 距離空間 (X,d) におけるコーシー列 $\{f_n\}$ に対して,

$$\sup_{n\geq 1}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| < \infty$$

であることを示せ.

(2) 関数列 $\{f_n\}$ $(f_n \in X)$ と $\mathbb{R}$ 上の実数値関数 f に対して,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)-f(x)| = 0$$

が成り立つならば, $f \in X$ であることを示せ.

(3) 距離空間 (X,d) は完備であることを示せ.

10 開区間 $I=(0,1)$ 上の関数 f_n $(n=1,2,\cdots)$ を以下のように定める：

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n} & (0<x\le 1/n),\\ 0 & (1/n<x<1).\end{cases}$$

また, μ を実直線 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする. このとき, 関数列 $\{f_n\}$ の $n\to\infty$ における振る舞いに関する以下の主張に対し, それが正しいかどうかを, その理由と共に述べよ.

(a) $\{f_n\}$ は I のすべての点において 0 に収束する.

(b) $\{f_n\}$ は定数関数 0 に I 上一様収束する.

(c) ルベーグ積分 $\displaystyle\int_I |f_n(x)-g(x)|\,d\mu(x)$ は 0 に収束する. ただし g は

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ が有理数の場合}),\\ 0 & (\text{それ以外の場合})\end{cases}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の関数である.

(d) $L^2(I,\mu)$ において $\{f_n\}$ は 0 に強収束しない (すなわち, ノルムの意味での収束はしない) が, 弱収束する.

11 $x = x(t)$, $y = y(t)$ に関する常微分方程式

$$(*) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $P^{-1}AP$ が対角行列となるような 2 次正則行列 P を 1 つ求め, そのときの $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(2) 微分方程式 $(*)$ を初期条件 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の下で解け.

(3) 任意の初期条件 $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (ただし, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$) から出発した $(*)$ の解 $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log\{x(t)^2 + y(t)^2\}$$

を求めよ.

12 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値確率変数列 X_k $(k = 1, 2, \cdots)$ は独立同分布であり, その分布は

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

に従うものとする. 自然数 n に対して, $W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおく.

(1) W_n の期待値 $\mathbb{E}[W_n]$ を求めよ.

(2) $(W_n)^2$ の期待値 $\mathbb{E}[(W_n)^2]$ を求めよ.

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[(W_n)^4]$ を求めよ.

（２００１年１月１３日）　（以上）