名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題（２次募集）

数学基礎

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

$\boxed{1}$ 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ とその上の内積

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

を考える. $v = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とし, v に直交するベクトル全体のなす $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間を W とする.

(1) W の基底を１組求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ で, 特に $v_1 = v$ となるものを１組求めよ.

(3) ベクトル $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を

$$a = \lambda v + x, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \ \ x \in W$$

の形に表せ.

$\boxed{2}$ 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ の１組の基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

のようにとる．また, $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$F(v_1) = v_2, \qquad F(v_2) = v_3, \qquad F(v_3) = 0$$

をみたす線形変換とする.

(1) F の像 $\mathrm{Im}\,(F)$ および核 $\mathrm{Ker}\,(F)$ それぞれの次元を求めよ.

(2) 合成写像 $F^2 = F \circ F$ に対し, $\mathrm{Im}\,(F^2)$ および $\mathrm{Ker}\,(F^2)$ それぞれの次元を求めよ.

(3) 3 次実正方行列 A で, 条件

$$\mathrm{Im}\,(F_A) = \mathrm{Im}\,(F^2), \qquad \mathrm{Ker}\,(F_A) = \mathrm{Ker}\,(F^2)$$

を共にみたすものをすべて求めよ．ただし F_A は A によって定まる $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換を表す.

$\boxed{3}$ 次式によって実数全体で定義された関数 $f(x)$ を考える：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ において連続であることを示せ.

(2) 関数 $f(x)$ は $x = 0$ において微分可能であることを示し, $x = 0$ における微分係数を求めよ.

(3) 導関数 $f'(x)$ は $x = 0$ において連続かどうか, 理由と共に答えよ.

$\boxed{4}$ a を $0 < a < 1$ をみたす定数とする.

(1) θ の関数

$$\frac{\cos^2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

を z の関数として表せ. ただし, $z = e^{i\theta}$ とする.

(2) 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,d\theta$$

の値を求めよ.