名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題

数学専門問題（昼夜開講コース）

問題は全部で７問である. このうちから３問を選んで解答せよ.
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ.

1 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ を 2 を法とする剰余類のなす体とする.

$$SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ ad - bc = \bar{1} \right\}$$

を $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元を成分とする 2 次正方行列で, 行列式が $\bar{1}$ であるもの全体のなす群とする. このとき, $SL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の元 A で $A^2 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ および $A^3 = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$ となるものをすべて求めよ.

2 n は 3 以上の整数とし,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) 実線形空間 $\mathbb{R}^2$ の $\{0\}$ でも $\mathbb{R}^2$ 全体でもない線形部分空間 W で, 次の条件 $(*)$ をみたすものは存在しないことを示せ.
　$(*)$ 任意の $w \in W$ に対して $Aw \in W$.

(2) 複素線形空間 $\mathbb{C}^2$ の $\{0\}$ でも $\mathbb{C}^2$ 全体でもない線形部分空間 U で, 次の条件 $(**)$ をみたすものは存在するか. 理由とともに答えよ.
　$(**)$ 任意の $u \in U$ に対して $Au \in U$ かつ $Bu \in U$.

（２０００年８月２日）　　　　　　　　　　　　（次ページあり）

3 ３次実直交行列で, 行列式が 1 のもの全体を $SO(3)$ とする. すなわち

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I,\ \det A = 1\}.$$

（ただし I は単位行列.）

(1) $SO(3)$ の任意の元 A は 1 を固有値として持つことを示せ.

(2) $A \in SO(3)$ を単位行列とは異なる任意の元とする. A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換は, $\mathbb{R}^3$ の原点を通るある直線のまわりの回転であることを示せ.

4 次の４つの位相空間を考える:

(a) 開円板 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) 球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) トーラス $S^1 \times S^1$ （ただし $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ）.

(d) メビウスの帯の境界を１点につぶした空間 X.

このとき, 次の問に答えよ.

(1) (a), (b), (c), (d) のうち, コンパクトなものをすべてあげよ（答えのみでよい）.

(2) (a), (b), (c), (d) それぞれの空間は平面 $\mathbb{R}^2$ と位相同型になるかどうか簡潔な理由とともに答えよ.

(3) (a), (b), (c), (d) それぞれの空間から１点をとり除いたものは平面 $\mathbb{R}^2$ と位相同型になるかどうか簡潔な理由とともに答えよ.

5 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の解 $(x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ を考える．ただし，$(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とする．

(1) $f(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$ を求めよ．

(2) $(x(t), y(t))$ は xy 平面上でどのような軌道を描くか．軌道の向きも含めて図示せよ．

6 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$$

の特性方程式 $r^2 + 2r + 1 = 0$ ($x(t) = e^{rt}$ とおいたとき r のみたす方程式) は重根 $r = -1$ をもつ．よってひとつの基本解は $x(t) = e^{-t}$ である．定数変化法を用いてもうひとつの基本解を求めよ．

(2) 差分方程式

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0 \quad (n = 0, 1, \cdots)$$

の特性方程式 $r^2 + 2r + 1 = 0$ ($x_n = r^n$ とおいたとき r のみたす方程式) は $r = -1$ を重根にもつ．よってひとつの基本解は $x_n = (-1)^n$ である．定数変化法を用いてもうひとつの基本解を求めよ．さらに $(x_0, x_1) = (1, 2)$ の場合の解を求めよ．

7 a を 2π の整数倍ではない実数とし，$\cos ax$ を閉区間 $[0, 1]$ 上の関数と考える．

(1) $\cos ax$ のフーリエ展開を求めよ．

(2) (1) を用いて $\sin x$ の部分分数展開

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2}, \quad (x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

を示せ．

（２０００年８月２日） （以上）