名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題

数学基礎問題（昼夜開講コース）

問題は全部で４問である．このうちから３問を選んで解答せよ．
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ.

1 次の連立１次方程式の解の一般形を求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2 a を実数とする.

(1) 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ において，３つのベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって張られる線形部分空間 V の次元を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ において，２つのベクトル

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

によって張られる線形部分空間を W とする．(1) の線形部分空間 V との交わり $V \cap W$ の次元が 1 となるような a の値を求めよ.

（２０００年８月２日）　　　　（次ページあり）

3 $\mathbb{R}$ の開区間 I 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が, 次の条件 $(*)$ を満たすとき上に凸であるという.

$(*)$ 任意の $x, y \in I$ と $0 \leq \lambda \leq 1$ に対して,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

このとき, 次の問に答えよ.

(1) I 上の実数値関数 $g(x)$ が滑らかで, さらに $g'(x)$ が単調減少ならば, $g(x)$ は上に凸であることを証明せよ.

(2) $\log x$ $(x \geq 0)$ は上に凸であることを示し, このことを用いて, 任意の $a, b > 0$ に対して不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

が成り立つことを証明せよ.

(3) 関数 $f(x)$ は上に凸であるとする. この時, 任意の $x_1, \cdots, x_n \in I$ と $0 \leq \lambda_1, \cdots, \lambda_n \leq 1$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ を満たす $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ に対して,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

が成り立つことを証明せよ.

(4) 任意の $a_1, \cdots, a_n > 0$ に対して不等式

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

が成り立つことを証明せよ.

4

(1) $f(x)$ を $0 \leq x \leq a$ で定義された連続な狭義単調増加関数とする．（すなわち，$0 \leq x_1 < x_2 \leq a$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ を満たす.）さらに，$f(0) = 0$，$f(a) = b$ であるとし，$g(y)$ を $f(x)$ の逆関数とする．この時，等式

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(y)\,dy = ab$$

を証明せよ.

(2) 積分

$$\int_0^b \mathrm{Arctan}(y)\,dy \quad (b \geq 0)$$

を求めよ．ここで $\mathrm{Arctan}(y)$ は $\tan(x)$ $(0 \leq x < \dfrac{\pi}{2})$ の逆関数である.

（２０００年８月２日）　　（以上）