名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題

数学専門問題

問題は全部で１４問である. このうちから４問を選んで解答せよ.
選択した問題の番号を答案用紙の所定の欄に記入せよ.

1 $\mathbb{F}_2$ を $0, 1$ の 2 つの元からなる体とし,

$$SL_2(\mathbb{F}_2) = \{A \in M_2(\mathbb{F}_2) \mid \det A = 1\}$$

を, $\mathbb{F}_2$ の元を成分とする 2 次正方行列で行列式が 1 であるもの全体のなす群とする. このとき, $SL_2(\mathbb{F}_2)$ は 3 次対称群 S_3 と群として同型であることを示せ.

2 実数体 $\mathbb{R}$ 上の 1 変数多項式環 $\mathbb{R}[X]$ の, $X^2(X-1)^2$ で生成されるイデアル $(X^2(X-1)^2)$ による剰余環を

$$A = \mathbb{R}[X]/(X^2(X-1)^2)$$

とする. 次にあげる環がこの A と環として同型になるかどうか答えよ. もし同型になるならば具体的に同型写像を与えることによって証明し, 同型にならないならばその理由を述べよ.

(a) $\mathbb{R}[X]/(X(X-1))$.

(b) $\mathbb{R}[X]/(X^2) \times \mathbb{R}[X]/((X-1)^2)$.

(c) $\mathbb{R}[X]/(X(X-1)) \times \mathbb{R}[X]/(X(X-1))$.

3 n を 3 以上の整数とし，

$$G = \langle\, \sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = e,\ \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}\,\rangle \quad (e \text{ は } G \text{ の単位元})$$

を位数 $2n$ の正二面体群とする．また，

$$A = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\rho(\sigma) = A$, $\rho(\tau) = B$ によって定まる G の実線形空間 $\mathbb{R}^2$ 上の表現 $\rho\colon G \longrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ は既約であることを示せ．

(2) $\pi(\sigma) = A$, $\pi(\tau) = B$ によって定まる G の複素線形空間 $\mathbb{C}^2$ 上の表現 $\pi\colon G \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$ は既約になるか．理由とともに答えよ．

4 $\zeta = e^{2\pi i/7}$ $(i = \sqrt{-1})$ を 1 の原始 7 乗根とし，$\mathbb{Q}(\zeta)$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上 ζ によって生成される複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体とする．

(1) $\mathbb{Q}(\zeta)$ を $\mathbb{Q}$ 上の線形空間と見たときの基底を１組求めよ．

(2) 拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ はガロア拡大であることを示し，そのガロア群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ を決定せよ．

(3) 拡大 $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体を全て求めよ．

5 ３次実直交行列で, 行列式が１のもの全体を $SO(3)$ とする．すなわち

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I,\ \det A = 1\}.$$

（ただし I は単位行列.）

(1) $SO(3)$ の任意の元 A は 1 を固有値として持つことを示せ.

(2) $A \in SO(3)$ を単位行列とは異なる任意の元とする．A の定める $\mathbb{R}^3$ の線形変換は, $\mathbb{R}^3$ の原点を通るある直線のまわりの回転であることを示せ.

6 (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の C^∞ 曲線 $p(s) = (x(s), y(s))$ $(s \geq 0)$ の曲率 $\kappa(s)$ の定義を述べよ．ただし, すべての s に対して $p'(s) = \dfrac{dp}{ds}(s)$ の長さ $\|p'(s)\|$ は 1 であるとする.

(2)

$$p(s) = \left(\int_0^s \sin\frac{t^2}{2}\,dt,\ \int_0^s \cos\frac{t^2}{2}\,dt\right), \quad s \geq 0$$

によって定義される曲線 $p(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ は

$$\kappa(s) = -s$$

で与えられることを確かめよ.

(3) $p_1(s)$, $p_2(s)$ $(s \geq 0)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 内の C^∞ 曲線とし, すべての s に対し $\|p_1'(s)\| = \|p_2'(s)\| = 1$ が成り立っているとする．$p_1(s)$, $p_2(s)$ の曲率をそれぞれ $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$ とする．もし, ２つの条件

$$\begin{cases} p_1(0) = p_2(0) = 0, \\ \text{すべての } s \geq 0 \text{ に対し}, \kappa_1(s) = \kappa_2(s) \end{cases}$$

が成り立つならば, 原点 0 を中心とするある回転により, 曲線 $p_1(s)$ は曲線 $p_2(s)$ に重ねられることを示せ.

7 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| < 1\}$ を正方形の内部とする.

(1) $f(x,y),\ g(x,y)$ を D 上で定義された C^1 級実数値関数とする．D 上の実数値関数 $\phi(x,y)$ に対する微分方程式系

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = f(x,y), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$$

が解を持つための必要十分条件は,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

が成り立つことである．これを証明せよ.

(2) D 上で定義された C^1 級１次微分形式 (1-形式) ω に対して, $d\omega = 0$ が成り立つならば $d\phi = \omega$ なる関数 ϕ が存在することを示せ.

8 次の４つの位相空間を考える:

(a) 開円板 $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

(b) 球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) トーラス $S^1 \times S^1$ （ただし $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ）.

(d) メビウスの帯の境界を１点につぶした空間 X.

このとき, 次の問に答えよ.

(1) (a), (b), (c), (d) のうち, コンパクトなものをすべてあげよ（答えのみでよい）.

(2) (a), (b), (c), (d) それぞれの空間は平面 $\mathbb{R}^2$ と位相同型になるかどうか簡潔な理由とともに答えよ.

(3) (a), (b), (c), (d) それぞれの空間から１点をとり除いたものは平面 $\mathbb{R}^2$ と位相同型になるかどうか簡潔な理由とともに答えよ.

(4) (a), (b), (c), (d) それぞれの空間は２次元実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ と位相同型になるかどうか簡潔な理由とともに答えよ.

9 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ が, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して不等式

$$|f(z)| \leq C\,(|z|+1)^n$$

を満たしているとする. ただし, 正数 C と整数 n は z によらない定数である.

(1) $n = 0$ のとき, $f(z)$ は定数関数であることを示せ.

(2) $n \geq 1$ のとき, $f(z)$ は次数が n 以下の多項式であることを示せ.

10 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の解 $(x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ を考える. ただし, $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ とする.

(1) $f(t) = (x(t))^2 + (y(t))^2$ を求めよ.

(2) $(x(t), y(t))$ は xy 平面上でどのような軌道を描くか. 軌道の向きも含めて図示せよ.

11 開区間 $(0,1)$ 上のルベーグ可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = 0$$

をみたしているとする．以下の命題が成立するかどうか答えよ．もし成立するならばその証明を与え, 成立しないならばその反例を与えよ.

(a) $(0,1)$ 内のすべての点 x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(b) $(0,1)$ 内のほとんどすべての点 x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

(c) ε を任意の正数とし, $E_n = \{x \in (0,1) \mid |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$ とする．集合 E_n のルベーグ測度 $\mu(E_n)$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

(d) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ を適当にとれば, $(0,1)$ 内のほとんどすべての点 x に対して $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = 0$.

12 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C([0,1])$ とする．$C([0,1])$ 上の距離 d を

$$d(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \quad (f,g \in C([0,1]))$$

によって定義する.

(1) $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$ に対して $d(f,g)$ を求めよ.

(2) $C([0,1])$ の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が, $[0,1]$ 上のある関数 f に $[0,1]$ 上で一様収束したとする．このとき $f \in C([0,1])$ であることを示せ.

(3) $C([0,1])$ は距離 d に関して完備であることを示せ.

13 (1) 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0$$

の特性方程式 $r^2+2r+1=0$ ($x(t)=e^{rt}$ とおいたとき r のみたす方程式) は重根 $r=-1$ をもつ．よってひとつの基本解は $x(t)=e^{-t}$ である．定数変化法を用いてもうひとつの基本解を求めよ．

(2) 差分方程式

$$x_{n+2}+2x_{n+1}+x_n=0 \quad (n=0,1,\cdots)$$

の特性方程式 $r^2+2r+1=0$ ($x_n=r^n$ とおいたとき r のみたす方程式) は $r=-1$ を重根にもつ．よってひとつの基本解は $x_n=(-1)^n$ である．定数変化法を用いてもうひとつの基本解を求めよ．さらに $(x_0,x_1)=(1,2)$ の場合の解を求めよ．

14 関数 $V(x,y)=x^4-4x^3+4x^2+y^2$ に対して, 常微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial y}$$

にしたがって運動する点 (x,y) を考える．

(1) 時刻 t における点の座標を $(x(t),y(t))$ とするとき, $V(x(t),y(t))$ は t の広義単調減少関数（単調非増加関数）であることを示せ．

(2) 時刻 $t=0$ における初期条件 (x_0,y_0) を変えたとき, 極限

$$(x_\infty,y_\infty)=\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t))$$

として可能なものをすべてあげよ．

(3) どのような初期条件から出発すれば (2) にあげた (x_∞,y_∞) にいくか, 初期条件との関係をつけよ．

（２０００年８月２日）　　（以上）