名古屋大学大学院多元数理科学研究科
２００１年度前期課程入学試験問題

数学基礎問題

以下の４題の問題すべてに解答せよ.

1 V を

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

により定義される $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする.

(1) V の基底を１組求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ に対し $\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \in V$ を対応させる V の線形変換を f とする. (1) で求めた基底に関する f の行列表示を求めよ.

2 a を実数とする.

(1) 実線形空間 $\mathbb{R}^3$ において, ３つのベクトル

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によって張られる線形部分空間 V の次元を求めよ.

(2) $\mathbb{R}^3$ において, ２つのベクトル

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

によって張られる線形部分空間を W とする. (1) の線形部分空間 V との交わり $V \cap W$ の次元が 1 となるような a の値を求めよ.

（２０００年８月２日）　　　　　　　　　　　　　　　　　（次ページあり）

3 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$a_1 > -2,$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

を満たすとき, 次の問に答えよ.

(1) $\{a_n\}$ が（広義）単調数列であることを示せ.

(2) $\{a_n\}$ が収束することを示し, その極限値を求めよ.

4 留数計算を実行することにより, 次の積分の値を求めよ：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1}\, dx.$$

（２０００年８月２日） （以上）