2022年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2021 年 8 月 3 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5 枚 1 組**である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある．$\boxed{\mathbf{1}}$，$\boxed{\mathbf{2}}$，$\boxed{\mathbf{3}}$ **の 3 題すべてに解答すること．**
4. 答案用紙は **3 枚 1 組**である．各自確認すること．**ホッチキスを外してはならない．**
5. 答案用紙は，**1 枚目が** $\boxed{\mathbf{1}}$ **用，2 枚目が** $\boxed{\mathbf{2}}$ **用，3 枚目が** $\boxed{\mathbf{3}}$ **用となっ**ている．間違えないこと．
6. **すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．**
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{\mathbf{3}}$ **では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入する**こと．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を n 次実対称行列で $a_{11}\neq 0$ をみたすものとする．$k=1,2,\ldots,n$ に対して $A_k=(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ とおき，A_k に対応する $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ の 2 次形式

$$q_k(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j$$

を考える．以下の問に答えよ．なお，(1)，(2) では $n\ge 2$ とし，$k\in\{2,3,\ldots,n\}$ をひとつ固定して考える．

(1) $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ の 2 次形式

$$\widetilde{q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=q_k(x_1,x_2,\ldots,x_k)-\frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k)^2$$

は x_1 によらないことを示せ．

(2) (1) の 2 次形式 $\widetilde{q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ を $(k-1)$ 次実対称行列 $B_k=(b_{ij})_{2\le i,j\le k}$ を用いて

$$\widetilde{q_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\sum_{i,j=2}^{k}b_{ij}x_ix_j$$

と表す．このとき，

$$\det A_k=a_{11}\det B_k$$

を示せ．

(3) すべての $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ に対して $\det A_k>0$ であれば，A に対応する 2 次形式 $q_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ は正定値（$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\neq(0,0,\ldots,0)$ ならば $q_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)>0$）であることを示せ．

2 実数 x に対して $\phi(x) = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - m|$ と定め，非負整数 k に対して $\phi_k(x) = \phi(2^k x)/2^k$ とおく．また，開区間 $(0,1)$ 上の関数 $T(x)$ を

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$$

によって定義する．以下の問に答えよ．

(1) $k = 0, 1, 2$ の場合に関数 $\phi_k(x)$ の $(0,1)$ 上でのグラフを描け．

(2) $T(x)$ は連続関数であることを示せ．

以下の問 (3), (4) では，$x \in (0,1)$ および非負整数 n に対して，$p \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ を $p/2^n \leq x < (p+1)/2^n$ となるように選び，$u_n = p/2^n$, $v_n = (p+1)/2^n$ とおく（u_n, v_n は x による）．

(3) $x \in (0,1)$ および非負整数 n, k はいずれも任意とする．

$$\frac{\phi_k(v_n) - \phi_k(u_n)}{v_n - u_n}$$

の取り得る値をすべて求めよ．

(4) 任意の $x \in (0,1)$ に対して，

$$\frac{T(v_n) - T(u_n)}{v_n - u_n}$$

は，$n \to \infty$ とするとき収束しないことを示せ．

(5) $T(x)$ は $(0,1)$ の任意の点において微分不可能であることを示せ．

3 以下の (1)〜(12) の 12 問のうちから **4 問を選んで**解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) G を位数 7 の巡回群とする．G の自己同型群の構造を決定せよ．

(2) 自身を除く全てのイデアルが素イデアルになる（単位元をもつ）可換環は体になることを示せ．

(3) $x^5 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を L とする．L の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群の位数を求めよ．また，$\mathbb{Q}$ 上の拡大次数 4 の中間体をすべて求めよ．

(4) $\mathbb{R}^6 = \{(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) \mid x_i, y_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, 3)\}$ において，次の 3 つの式

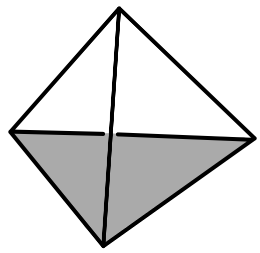
$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1,$$

$$(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1,$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$$

で定義される部分集合は可微分多様体になることを示せ．

(5) 四面体の 4 つの面のうち 3 つの面を取り除いて得られる図のような単体複体 K を考える．この単体複体 K の 1 次の整数係数ホモロジー群 $H_1(K, \mathbb{Z})$ を求めよ．



3 （つづき）

(6) $\mathbb{R}^3 = \{(X_1, X_2, X_3) \mid X_j \in \mathbb{R}\,(j = 1, 2, 3)\}$ 上の計量 ds^2 を $ds^2 = dX_1 \otimes dX_1 + dX_2 \otimes dX_2 + dX_3 \otimes dX_3$ と定める．また，写像 $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi(x, y) = \left(x - \tanh x,\ \frac{\sin y}{\cosh x},\ \frac{\cos y}{\cosh x}\right)$$

と定める．ただし $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ である．以下の問に答えよ．

(a) φ による ds^2 の引き戻し $\varphi^*(ds^2)$ を求めよ．

(b) $z = \cosh x$ とおくとき，$\varphi^*(ds^2)$ を y, z を用いて表せ．

(7) 複素関数

$$f(z) = \begin{cases} z^2 \sin \frac{1}{z} & (z \neq 0) \\ 0 & (z = 0) \end{cases}$$

は正則か否かを判定せよ．

(8) f は測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数で $f \geq 0$ であるものとする．$\displaystyle\int_X f(x)\,d\mu = 0$ ならば $\mu(\{x \in X \mid f(x) > 0\}) = 0$ であることを示せ．

(9) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $u(x, y)$ に対する微分方程式

$$a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

を初期条件 $u(x, x) = g(x)$ の下で考える．ここで a, b は実定数である．任意の C^1 級関数 $g(x)$ に対して解 u が一意的に存在するための，a, b の必要十分条件を求めよ．また，そのときの解を $g(x)$ を用いてあらわせ．（ヒント：$f(t) = u(x+at, x-bt)$ に対する常微分方程式を考えよ．）

3 （つづき）

(10) H を $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間とし，(f,g) を $f,g \in H$ の内積とする．一般に H の部分集合 A に対して

$$A^{\perp} = \{f \in H \,|\, \text{すべての } g \in A \text{ に対し } (f,g) = 0\}$$

とおくとき，$A^{\perp}$ は H の閉線形部分空間となることを示せ．さらに，$(A^{\perp})^{\perp}$ は A を含む最小の H の閉線形部分空間であることを示せ．

(11) 複素べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は， $z = z_0$ で収束すれば $|z| < |z_0|$ となるすべての z で収束し，$z = z_0$ で発散すれば $|z| > |z_0|$ となるすべての z で発散することを示せ．

(12) n, k は，$n \geq k \geq 2$ をみたす整数とする．方程式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ の正整数解 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ 全体の集合を X とする．また，$\{1, 2, \ldots, n-1\}$ の部分集合であって，元の個数 (濃度) が $k-1$ であるようなものの全体を Y とする．全単射 $f : X \to Y$ を一つ与えよ．