2020年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2019 年 7 月 30 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{\mathbf{1}}$ ， $\boxed{\mathbf{2}}$ ， $\boxed{\mathbf{3}}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{\mathbf{1}}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{\mathbf{2}}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{\mathbf{3}}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{\mathbf{3}}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：
問題中の $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 2 次実対称行列 A, B, C が次の関係式をみたすとする．

$$C^2 = I, \quad AB = BA, \quad CA + I = BC.$$

ただし，I は 2 次単位行列を表す．さらに $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq \beta)$ であると仮定する．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) B も対角行列であることを示せ．

(2) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $C\mathbf{e}_1$ が 1 次従属なら C も対角行列であることを示せ．

(3) C が対角行列でないときに，B を α, β を用いて表せ．

(4) C が対角行列でなければ，$|\alpha - \beta| > 1$ であることを示せ．さらにその場合に，C を α, β を用いて表せ．

2 $t>0$ の範囲で定まる実数値関数 $g(t)$ が C^1 級で，定数 $C_1>0, C_2>0$ が存在して，任意の $t>0$ に対して

$$|g(t)| \leqq C_1, \qquad |g'(t)| \leqq \frac{C_2}{t}$$

をみたすとする．このとき，2 変数関数

$$f(x,y)=\int_{1/y}^{y} \frac{\sin(xt)}{t}\, g(t)\, dt \quad (x \geqq 0,\ y \geqq 1)$$

が有界であることを示せ．

ヒント：次の範囲に分けて議論することが考えられる．

(1) $x \geqq 0, y \geqq 1, xy \leqq 1$ の範囲．

(2) $x \geqq 0, y \geqq 1, x \geqq y$ の範囲．

(3) $x \geqq 0, y \geqq 1, \dfrac{1}{y} \leqq x \leqq y$ の範囲．

3 以下の (1) ～ (12) の 12 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) G を位数 n の群とするとき，G から n 次対称群 S_n への単射準同型が存在することを示せ．

(2) 実係数多項式環 $\mathbb{R}[x]$ を $x^4 - x^2 - 2x + 2$ で生成されるイデアルで割って得られる剰余環 A を考える．このとき，A のイデアルを自明なものも含めてすべて与えよ．さらに，A の極大イデアル I それぞれに対して，剰余環 A/I の構造を述べよ．

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{7})$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であることを示し，この体の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群を求めよ．

(4) n 次実一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$ から n 次実対称行列全体 $S_n(\mathbb{R})$ への写像 f を $f(X) = {}^tXX$ と定める．このとき，f の $A \in GL(n, \mathbb{R})$ における微分写像を求め，それが全射であることを示せ．ただし，n 次実正方行列全体 $M_n(\mathbb{R})$ を自然に n^2 次元ユークリッド空間とみなしたとき，$GL(n, \mathbb{R})$ および $S_n(\mathbb{R})$ には $M_n(\mathbb{R})$ のそれぞれ開集合，線型部分空間として自然な C^∞ 級多様体の構造を考えている．

(5) 2 次元トーラスから 1 点を除いて得られる空間の整係数ホモロジー群を求めよ．

(6) 3 次元単位球体 B^3 とその境界である 2 次元単位球面 S^2 を考える．このとき，S^2 上の恒等写像は B^3 から S^2 への連続写像に拡張できないことを示せ．

(7) 複素平面内の領域，すなわち，連結開集合 D で正則な関数 $f(z)$ が D の 1 点 a で

$$f^{(n)}(a) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

をみたすならば D 上で恒等的に $f(z) = 0$ となることを示せ．

3 （つづき）

(8) 有限測度空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の可測関数 f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ に対して，次の条件 (a), (b) が同値であることを示せ．ただし，有限測度空間とは全測度 $\mu(\Omega)$ が有限である測度空間を意味する．

(a) $\lim_{n \to \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ が μ-a.e. $\omega \in \Omega$ に対して成り立つ．

(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して次が成り立つ：

$$\lim_{m \to \infty} \mu\Big(\bigcup_{n \geqq m} \{\omega \in \Omega \,;\, |f_n(\omega) - f(\omega)| > \varepsilon\} \Big) = 0.$$

ヒント：条件 (a) は $\mu(\{\omega \in \Omega \,;\, \overline{\lim}_{n \to \infty} |f_n(\omega) - f(\omega)| > 0\}) = 0$ と同値である．

(9) 初期境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{2019}{2020} u(x,t) & (0 < x < \pi, t > 0), \\ u(x,0) = u_0(x) & (0 \leqq x \leqq \pi), \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

を考える．ただし，u_0 は $[0, \pi]$ を含む開区間上の C^2 級実数値関数で $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$ をみたすものとする．このとき，フーリエ級数展開を用いて (形式的に) 解を求め，得られた解 $u(x,t)$ について $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = 0$ を示せ．また，この収束は x に関して一様か否か吟味せよ．

(10) バナッハ空間 X, Y と有界線型作用素 $T_n : X \to Y$ $(n = 1, 2, \dots)$ を考える．このとき，任意の $x \in X$ に対して $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ が Y 内のコーシー列ならば，列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある有界線型作用素 $T : X \to Y$ に作用素強位相に関して収束すること，すなわち，任意の $x \in X$ に対して，$\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx$ が成り立つことを示せ．

3 （つづき）

(11) 有界閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ に対して，定数 $\alpha, \beta \geqq 0$ が存在して，任意の $a \leqq x \leqq b$ について

$$f(x) \leqq \alpha + \beta \int_a^x f(t)\, dt$$

が成り立つとする．このとき，$f(x) \leqq \alpha e^{\beta(x-a)}$ $(a \leqq x \leqq b)$ が成り立つことを示せ．

(12) 定数 $a, b \in \mathbb{R}$ で $b > 0$ をみたすものを考える．次の問に答えよ．

(i) パラメータ $\theta \in \mathbb{R}$ に依存する

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x-a)^2 + \theta x}\, dx$$

を計算せよ．また，$I(\theta)$ を使って $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-b(x-a)^2}\, dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求める方法を述べよ．

(ii) パラメータ $c \in \mathbb{R}$ に依存する

$$J(c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^4\, e^{-b(x-a)^2}\, dx$$

が最小になる c をすべて決定し，その場合に $J(c)$ の値を求めよ．