2019年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2018 年 7 月 31 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 $\mathbb{R}^n$ において $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は標準的な内積とする．$\mathbb{R}^n$ の任意の基底 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ に対して次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^n$ の n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ で

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$$

を満たすものがただひとつ存在することを示せ．ここで δ_{ij} は $i = j$ のとき 1, $i \neq j$ のとき 0 と定める．

(2) (1) で求めた $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ．

(3) $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mu_i \mathbf{w}_i$ $(\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R})$ に対して $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ となるための条件を λ_i, μ_i を用いて表せ．

(4) $\mathbb{R}^n$ の領域 C を

$$C = \{\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n \,|\, \lambda_i > 0 \ (1 \leq \forall i \leq n)\}$$

と定める．

$$D = \bigcup_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{x}^\perp$$

の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus D$ を $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ を用いて表せ．ここで

$$\mathbf{x}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$$

である．

(5) $n \geq 3$ とする．2 次元以上の任意の部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ は $D \setminus \{\mathbf{0}\}$ と交わることを示せ．

2 $f(x)$ を $(-\infty, \infty)$ 上で定義された実数値 C^1 級関数で，$(-\infty, \infty)$ 上で不等式

$$f(x)^2 + f'(x) \le 0$$

が成り立つと仮定する．以下の問に答えよ．

(1) $f(x_0) > 0$ となる点 x_0 が存在するならば，区間 $(-\infty, x_0]$ で

$$f(x) > 0\ ,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) \ge 1$$

が成り立つことを示せ．

(2) 問 (1) の仮定のもとで右側極限

$$\lim_{x \to x_0 - \frac{1}{f(x_0)} + 0} f(x) = \infty$$

を導くことにより，任意の x に対し $f(x) \le 0$ であることを示せ．

(3) 実は $f(x) \equiv 0$ であることを証明せよ．

3 以下の (1) ～ (12) の 12 問のうちから **4 問を選んで**解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) 整数 x, y, z, w が在って

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{3}w\ , \\ q &= \frac{1}{4}x + \frac{4}{3}y + \frac{3}{4}z + \frac{11}{6}w \end{aligned}$$

がともに整数になるような (p, q) の全体 A は $\mathbb{Z}^2$ の部分 $\mathbb{Z}$ 加群になることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) S_3 を 3 次対称群とし $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とする．次の命題が正しければ証明し，正しくなければその理由を述べよ．

(i) 非自明な準同型 $S_3 \to \mathbb{Z}_2$ が存在する．

(ii) 非自明な準同型 $S_3 \to \mathbb{Z}_3$ が存在する．

(3) $w = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ とおく．

(i) $\mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底を求めよ．

(ii) $\mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2})$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であることを示せ．

(iii) $\mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\alpha)$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ を求めよ（答だけでなく理由も書くこと）．

3 (つづき)

(4) A を $\mathbb{R}^n$ のルベーグ可測集合とする．非負可測関数 $f(x)$ に対し

$$\int_A f(x)dx < \infty \tag{1}$$

ならば

$$\lim_{t\to\infty} t\,\mathrm{Vol}(\{x \in A \mid f(x) > t\}) = 0 \tag{2}$$

が成り立つことを証明せよ．また，(2) $\Rightarrow$ (1) が成り立たない例をつくり，それが例になっている理由を述べよ．

(5) $\ell^2 := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \mid x_n \in \mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ の部分集合に関する次の命題が正しければ証明し，誤りなら誤りである理由を述べよ．

(i) $A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\ \forall n = 1, 2, \ldots\}$ はコンパクトである．

(ii) $B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell^2 \mid |x_n| \leq \frac{1}{n}\ \forall n = 1, 2, \ldots\}$ はコンパクトである．

(6) 平面 $\mathbb{R}^2$ において，円周 C を囲むどんな区分的 C^1 級の閉曲線 Γ に対しても

$$\mathrm{Length}\,(C) \leq \mathrm{Length}\,(\Gamma)$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，区分的 C^1 曲線 Γ に対し $\mathrm{Length}\,(\Gamma)$ とは，Γ の弧長である．

(7) 単連結でガウス曲率が非正の曲面上の任意の 2 点を結ぶ測地線は高々1 本であることを証明せよ．

(8) 球面 S^2 上の C^∞ ベクトル場はかならずどこかで零点を持つことを示せ．

3（つづき）

(9) 以下の問に答えよ．

(i) $S^1 \vee S^2$（S^1 と S^2 を 1 点で接着して得られる位相空間）の基本群を求めよ．

(ii) $S^1 \vee S^2$ の普遍被覆空間を図示せよ．

(iii) $S^1 \vee S^1$ について (i), (ii) と同じ問いに答えよ．

(10) 複素平面の単位円周 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上の複素数値非定数連続関数 f であって，$|z| < 1$ を満たす任意の点 z に対し積分

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

が零になるようなものの例をあげ，それが例になっていることを示せ．

(11) $[0, \infty)$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$，$\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ がともに一様収束するが $\{f_n(x)g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は一様収束しないような例を作り，一様収束しない理由を述べよ．

(12) 群

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ , \ ad - bc = 1 \right\}$$

は $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成されることを示せ．

（2018 年 7 月 31 日）　（以上）