2018年度 名古屋大学大学院
多元数理科学研究科博士課程（後期課程）
入学試験問題

2017 年 8 月 1 日　9:00〜12:00

注意事項：

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．
2. 問題用紙は表紙を除いて **5** 枚 **1** 組である．試験開始後に各自確認すること．乱丁，落丁，印刷不鮮明な箇所などがあれば，ただちに監督者に申し出ること．
3. 問題は全部で 3 題ある． $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の **3** 題すべてに解答すること．
4. 答案用紙は **3** 枚 **1** 組である．各自確認すること．ホッチキスを外してはならない．
5. 答案用紙は，**1** 枚目が $\boxed{1}$ 用，**2** 枚目が $\boxed{2}$ 用，**3** 枚目が $\boxed{3}$ 用となっている．間違えないこと．
6. すべての答案用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること．
7. 答案用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には答案用紙表面右下の四角の中に×印を記入すること．
8. $\boxed{3}$ では，選択した小問の番号を答案用紙表面上部の所定の欄に記入すること．
9. 答案用紙のホッチキスがはずれた場合，あるいは計算用紙が足りなくなった場合は，監督者に申し出ること．
10. 試験終了後に提出するものは，3 枚 1 組の答案用紙である．この問題冊子と計算用紙は持ち帰ってもよい．

記号について：

問題中の $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ整数，有理数，実数，複素数全体のなす集合を表す．

1 J は実数を成分とする n 次正方行列，$J^2 = -I$ とする．ただし I は単位行列である．以下を示せ．

(1) n は偶数である．

(2) J の固有値は $\pm i$ である．

(3) J は対角化可能である．

(4) 固有値 $\pm i$ の重複度はともに $n/2$ である．

2 $K \subset \mathbb{R}^d$ はコンパクト，$f_n : K \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は連続, また，各 $x \in K$ に対し $f_n(x)$ は n について単調非増加かつ $\inf_{n\geq 1} f_n(x) > -\infty$ とする．さらに

$$m = \sup_{x\in K} \inf_{n\geq 1} f_n(x), \quad M = \inf_{n\geq 1} \sup_{x\in K} f_n(x)$$

とするとき，以下を示せ.

(1) $m \leq M$.

(2) 各 $n \geq 1$ に対し $\{x \in K \,;\, M \leq f_n(x)\} \neq \emptyset$.

(3) $m = M$.

(4) $x \mapsto \inf_{n\geq 1} f_n(x)$ が K 上連続と仮定すると，関数列 $(f_n)_{n\geq 1}$ は K 上一様収束する．(もし必要なら，$f(x) = \inf_{n\geq 1} f_n(x)$ とし，関数列 $(f_n - f)_{n\geq 1}$ に対し (3) の結果を用いよ.)

3 以下の (1) 〜 (12) の 12 問のうちから **4** 問を選んで解答せよ．選択した 4 問の番号を答案用紙の所定の欄に記入すること．5 問以上選択した答案は無効とする．

(1) $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, f は連続，さらに任意の収束数列 $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ に対し $f_n(x_n) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ とする．このとき，関数列 $(f_n)_{n \geq 1}$ は，$n \to \infty$ のとき f に広義一様収束することを示せ．

(2) n は非負整数，$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は整関数, かつ $(1 + |z|)^{-n}|f(z)|$ が $z \in \mathbb{C}$ について有界とする．このとき，f は高々n 次の多項式であることを示せ．

(3) V を実線形空間, $D, X : V \to V$ は線形写像で, $DX - XD = I$ とする. ただし, 写像の合成を表す記号 $\circ$ は省略し, 恒等写像を I で表す. $v \in V$, $Dv = 0$ とし, $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し, $v_k \in V$ を $v_0 = v$, $v_{k+1} = Xv_k$ $(k \geq 0)$ により定める. このとき, XDv_k を $v_0, v_1, \ldots, v_k$ で表せ. さらに, $v \neq 0$ のとき，V が無限次元であることを示せ.

(4) G を有限群, G の元 a の中心化群を $H = \{b \in G \mid ab = ba\}$ とする. G の H による剰余類の集合 G/H と, a を含む G の共役類 $\mathcal{C} = \{bab^{-1} \mid b \in G\}$ の間には, 全単射が存在することを示せ.

(5) 可換環 R のイデアル I, J に対し, $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ とおく. $I + J = R$ のとき, 次の環同型を示せ.

$$R/(I \cap J) \cong R/I \times R/J.$$

(6) 複素数 α は方程式 $f(X) = X^4 - 4X^2 + 2 = 0$ の解であるとする. 有理数体 $\mathbb{Q}$ に α を添加した体 $\mathbb{Q}(\alpha)$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であるかどうか調べよ.

(7) 〜 (12) は次ページ以降にある．

3 （続き）

(7) $(S, \mathcal{A}, \mu)$ は測度空間，$f : S \to \mathbb{R}$ は可測，$\int_S \exp(|f(x)|) d\mu(x) < \infty$ とする．次の極限を求め，それが実際に極限となることを証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^n d\mu(x).$$

(8) $L^2(\mathbb{R})$ において，次の部分空間の直交補空間を求めよ．

$$L = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, f(x) = f(-x) \ \ \text{a.e.}\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

ただし，$L^2(\mathbb{R})$ には内積 $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx$ を与える．

(9) 複素数列 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ と定め，$\|x\| < \infty$ をみたす複素数列 x 全体の集合にノルム $\|x\|$ を付与したノルム空間を ℓ^1 と記す．$\lim_{n\to\infty} m_n = 0$ をみたす複素数列 $m = (m_n)_{n=1}^{\infty}$ に対し，掛け算作用素 $T_m : x \mapsto (m_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ は ℓ^1 から ℓ^1 へのコンパクト作用素であることを示せ．

(10)〜 (12) は次ページにある．

3 （続き）

(10) 以下の各問に答えよ．

(i) $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$ とする．群 $SL(2,\mathbb{R})$ は $g(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ $\left(g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}),\ z \in \mathbb{H}\right)$ によって $\mathbb{H}$ に作用することを示せ．

(ii) $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 $B = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ は $\mathbb{H}$ に推移的に作用することを示せ．

(iii) $i \in \mathbb{H}$ を固定する $SL(2,\mathbb{R})$ の部分群 K を求めよ．

(iv) $SL(2,\mathbb{R})$ の任意の元は bk $(b \in B,\ k \in K)$ と分解できることを示せ．

(11) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 写像とし $c \in \mathbb{R}$ に対し $F^{-1}(c)$ の各点で $dF \neq 0$ とする．このとき曲面 $M = F^{-1}(c)$ は向きづけ可能であることを示せ．

(12) S^n を n 次元球面に $\mathbb{R}^{n+1}$ からの誘導位相を入れた位相空間とする．$S^1 \times S^1 \times [0,1]$ の元 (x,y,t),(x',y',t') に対し次の条件が成り立つとき $(x,y,t) \sim (x',y',t')$ と記す．

$$\begin{array}{llll} & x = x', & y = y', & t = t', \\ \text{または}, & & y = y', & t = t' = 0, \\ \text{または}, & x = x', & & t = t' = 1. \end{array}$$

$S^1 \times S^1 \times [0,1]$ の同値関係 $\sim$ による商位相空間を $S^1 * S^1$ と表す．この同値関係は，各 $y_1 \in S^1$ に対し $S^1 \times \{y_1\} \times \{0\}$ を 1 点につぶし，各 x_1 に対し $\{x_1\} \times S^1 \times \{1\}$ を 1 点につぶすことを意味する．$S^1 * S^1$ は S^3 に同相であることを示せ．